UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Laboratoire de mathématiques de Lens

École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur Lille

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Spécialité : mathématiques

Par Loïc Gaillard

Espaces de Müntz, plongements de Carleson, et opérateurs de Cesàro

Sous la direction de Pascal Lefèvre et Catalin Badea

Soutenue le 7 décembre 2017 devant un jury composé de :

M. Pascal Lefèvre	(Université d'Artois)	Directeur
M. Catalin Badea	(Université Lille 1)	Codirecteur
Mme Isabelle Chalendar	(Univ. Paris-Est Marne la Vallée)	Rapportrice
M. Gilles Godefroy	(Institut de Math. de Jussieu)	Rapporteur
Mme Catherine Finet	(Université de Mons)	Examinatrice
M. Emmanuel Fricain	(Université Lille 1)	Examinateur
Mme Sophie Grivaux	(Laboratoire Painlevé, Lille)	Examinatrice
M. Andreas Hartmann	(Institut de Math. de Bordeaux)	Examinateur

Remerciements

Cette thèse a été l'un de mes plus grands accomplissements personnels. De nombreuses personnes m'ont entouré lors de ce vaste projet, et même si une page ne peut pas suffire à remercier tout le monde, je peux quand même essayer.

Je suis honoré et ravi qu'Isabelle Chalendar et Gilles Godefroy aient accepté de rapporter ma thèse. Je remercie tout aussi chaleureusement Catherine Finet, Emmanuel Fricain, Sophie Grivaux et Andreas Hartmann pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux et pour avoir bien voulu faire partie du jury de ma thèse.

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude envers mes directeurs de thèse Pascal Lefèvre et Catalin Badea. Ils n'ont jamais cessé de me soutenir au cours de mon doctorat, même dans les moments les plus difficiles. C'est grâce à leur disponibilité, leur patience et leur grandes connaissances mathématiques que j'ai pu faire aboutir ce travail.

J'adresse également ma sympathie aux collègues d'analyse que j'ai eu l'occasion de voir régulièrement au laboratoire de Lens, au groupe de travail de Lille ou bien en conférences, je pense notamment à Daniel, Étienne, Hervé, Hubert, Karl, Martine, Quentin, Rishika, Romuald et Stéphane. Je salue tout particulièrement les collègues avec qui j'ai eu la chance de collaborer au cours de ma thèse, Ihab, Georges, Fares et Vincent.

Merci aussi à mes amis, matheux ou non, avec qui j'ai vécu de belles années à Lille : Antoine, Fadil, Gauthier, Hana, Jules, Lorette, Pierre-Antoine, Rafik et Tonie. Je remercie aussi les copains de Haute-Savoie qui m'ont rendu visite dans le Nord : Basile, Camille, Émilie, Fredéric, Jean Florent, Loïc, Maxime, Mélanie et Thomas, mais aussi Adrien, Charly, Florent, Gaetan, Mathias, Peio et Yann.

Enfin, j'ai une pensée particulière pour les membres de ma famille, qui m'ont soutenu de loin ou de près et rendu visite à plusieurs occasions, Christiane, Denise, Jean et Patrick de la "team Paladru", mes parents Chantal et Thierry de la "team Schonvy", et mes frères Axel et Kévin de la "team Lyon".

Un grand Merci à vous tous.

Résumé

Pour une suite $\Lambda = (\lambda_n)$ satisfaisant la condition de Müntz $\sum_n 1/\lambda_n < +\infty$ et pour $p \in [1, +\infty)$, on définit l'espace de Müntz M_Λ^p comme le sous-espace fermé de $L^p([0, 1])$ engendré par les monômes $y_n : t \mapsto t^{\lambda_n}$. L'espace M_Λ^∞ est défini de la même façon comme un sous-espace de $\mathcal{C}([0, 1])$. Lorsque la suite $(\lambda_n + 1/p)_n$ est lacunaire avec un grand indice, nous montrons que la famille (g_n) des monômes normalisés dans L^p est $(1 + \varepsilon)$-isométrique à la base canonique de ℓ^p. Dans le cas $p = +\infty$, les monômes (y_n) forment une famille normalisée et $(1 + \varepsilon)$-isométrique à la base sommante de c. Ces résultats sont un raffinement asymptotique d'un théorème bien connu pour les suites lacunaires. D'autre part, pour $p \in [1, +\infty)$, nous étudions les mesures de Carleson des espaces de Müntz, c'est à dire les mesures boréliennes μ sur [0,1) telles que l'opérateur de plongement $J_{\mu,p} : M_\Lambda^p \subset L^p(\mu)$ est borné. Lorsque Λ est lacunaire, nous prouvons que si les (g_n) sont uniformément bornés dans $L^p(\mu)$, alors μ est une mesure de Carleson de M_Λ^q pour tout $q > p$. Certaines conditions géométriques sur μ au voisinage du point 1 sont suffisantes pour garantir la compacité de $J_{\mu,p}$ ou son appartenance à d'autres idéaux d'opérateurs plus fins. Plus précisément, nous estimons les nombres d'approximation de $J_{\mu,p}$ dans le cas lacunaire et nous obtenons même des équivalents pour certaines suites Λ. Enfin, nous calculons la norme essentielle de l'opérateur de moyenne de Cesàro $\Gamma_p : L^p \to L^p$: elle est égale à sa norme, c'est à dire à p'. Ce résultat est aussi valide pour l'opérateur de Cesàro discret. Nous introduisons les sous-espaces de Müntz des espaces de Cesàro Ces_p pour $p \in [1, +\infty]$. Nous montrons que la norme essentielle de l'opérateur de multiplication par ψ est égale à $\|\psi\|_\infty$ dans l'espace de Cesàro, et à $|\psi(1)|$ dans les espaces de Müntz-Cesàro.

Mots clefs Espaces de Müntz, plongements de Carleson, suites lacunaires, classes de Schatten, norme essentielle, espaces de Cesàro, opérateurs de moyenne de Cesàro.

Classification AMS (2010) 30B10, 30H99, 47B09, 47B10, 47B38

Abstract

For a sequence $\Lambda = (\lambda_n)$ satisfying the Müntz condition $\sum_n 1/\lambda_n < +\infty$ and for $p \in [1, +\infty)$, we define the Müntz space M_Λ^p as the closed subspace of $L^p([0, 1])$ spanned by the monomials $y_n : t \mapsto t^{\lambda_n}$. The space M_Λ^∞ is defined in the same way as a subspace of $\mathcal{C}([0, 1])$. When the sequence $(\lambda_n + 1/p)_n$ is lacunary with a large ratio, we prove that the sequence of normalized Müntz monomials (g_n) in L^p is $(1 + \varepsilon)$-isometric to the canonical basis of ℓ^p. In the case $p = +\infty$, the monomials (y_n) form a sequence which is $(1 + \varepsilon)$-isometric to the summing basis of c. These results are asymptotic refinements of a well known theorem for the lacunary sequences. On the other hand, for $p \in [1, +\infty)$, we investigate the Carleson measures for Müntz spaces, which are defined as the Borel measures μ on $[0, 1)$ such that the embedding operator $J_{\mu,p} : M_\Lambda^p \subset L^p(\mu)$ is bounded. When Λ is lacunary, we prove that if the (g_n) are uniformly bounded in $L^p(\mu)$, then for any $q > p$, the measure μ is a Carleson measure for M_Λ^q. These questions are closely related to the behaviour of μ in the neighborhood of 1. We also find some geometric conditions about the behaviour of μ near the point 1 that ensure the compactness of $J_{\mu,p}$, or its membership to some thiner operator ideals. More precisely, we estimate the approximation numbers of $J_{\mu,p}$ in the lacunary case and we even obtain some equivalents for particular lacunary sequences Λ. At last, we show that the essential norm of the Cesàro-mean operator $\Gamma_p : L^p \to L^p$ coincides with its norm, which is p'. This result is also valid for the Cesàro sequence operator. We introduce some Müntz subspaces of the Cesàro function spaces Ces_p, for $p \in [1, +\infty]$. We show that the value of the essential norm of the multiplication operator T_ψ is $\|\psi\|_\infty$ in the Cesàro spaces. In the Müntz-Cesàro spaces, the essential norm of T_ψ is equal to $|\psi(1)|$.

Keywords Müntz spaces, Carleson embeddings, lacunary sequences, Schatten classes, essential norm, Cesàro spaces, Cesàro operators.

Mathematics Subject Classification (2010) 30B10, 30H99, 47B09, 47B10, 47B38

Table des matières

1 Résultats préliminaires **9**
1.1 Espaces de Müntz 9
1.1.1 Historique du théorème de Müntz 9
1.1.2 Inégalités dans les espaces de Müntz 14
1.1.3 Théorèmes de Gurariy-Macaev 18
1.2 Opérateurs compacts 25
1.2.1 Différents idéaux d'opérateurs 25
1.2.2 Estimations inférieures pour la norme essentielle 28
1.3 Mesures positives sur $[0, 1]$ 33
1.3.1 Mesures sous-linéaires et moments 33
1.3.2 Moments généralisés 38

2 Espaces de Müntz lacunaires **41**
2.1 Le plongement T_p^Λ de la base canonique de $\ell^p(w(p))$ 42
2.1.1 Estimation de $\|T_p^\Lambda\|$ quand $(\lambda_n + 1/p)_n$ est lacunaire 42
2.1.2 Estimation asymptotique de $\|T_p^\Lambda\|$, quand $p \to +\infty$ 47
2.2 Ensembles lacunaires avec un grand indice 52
2.2.1 Quand M_Λ^1 est $(1 + \varepsilon)$-isométrique à ℓ^1 53
2.2.2 Quand M_Λ^p est $(1 + \varepsilon)$-isométrique à ℓ^p, avec $p \in (1, +\infty)$ 57
2.2.3 Quand M_Λ^∞ est $(1 + \varepsilon)$-isométrique à c 60

3 Mesures de Carleson des espaces de Müntz **64**
3.1 Mesures de Carleson quand Λ est général 65
3.1.1 Conditions nécessaires 65
3.1.2 Conditions suffisantes 67
3.1.3 Opérateurs de composition à poids 72
3.2 Mesures de Carleson quand Λ est lacunaire 76
3.2.1 Bornitude de $J_{\mu,q}$ 76
3.2.2 Compacité de $J_{\mu,q}$ 81
3.2.3 L'opérateur $J_{\mu,2}$: classes de Schatten 84
3.2.4 Exemples 89
3.3 Mesures de Carleson quand Λ est quasi-lacunaire 92
3.3.1 Espaces de Müntz quasi-lacunaires 92
3.3.2 Caractérisation des mesures de Carleson de M_Λ^p 95

4 Opérateurs de Cesàro **98**
4.1 Espaces de Cesàro 99
4.1.1 Définition et propriétés immédiates 99
4.1.2 Théorème de Müntz dans les espaces de Cesàro 102
4.2 Norme essentielle des opérateurs de Cesàro 106
4.2.1 Opérateurs de Cesàro classiques 106
4.2.2 Les opérateurs de Cesàro sur les espaces de Cesàro 110
4.3 Opérateurs de multiplication 113

Introduction

Ce mémoire est en grande partie consacré à l'étude des espaces de Müntz, qui sont des espaces de fonctions analytiques sur $(0,1)$. Nous étudions aussi l'opérateur de moyenne de Cesàro en cherchant ses propriétés lorsqu'on le définit entre différents espaces. Nous profitons de cette introduction pour rappeler les notations utilisées tout au long de la thèse : des espaces de fonctions, des espaces de suites et des opérateurs.

Espaces de Müntz

Pour un espace de Banach X nous notons B_X sa boule unité. Pour $p \in [1, +\infty)$, nous notons $L^p = L^p([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ qui satisfont $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{1/p} < +\infty$. De plus, la notation $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1])$ désigne l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, muni de la norme uniforme. Pour une suite d'exposants $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ strictement croissante qui satisfait la *condition de Müntz* suivante

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty,$$

ainsi que la *gap-condition* suivante

$$\inf_{n\geq 0} \left(\lambda_{n+1} - \lambda_n\right) > 0,$$

on considère *l'espace* $M(\Lambda)$ *des polynômes de Müntz* défini par

$$M(\Lambda) = Span\{t^{\lambda_0}, t^{\lambda_1}, \ldots\}.$$

C'est *l'ensemble des combinaisons linéaires* des monômes $y_n : t \mapsto t^{\lambda_n}$. L'espace M_Λ^p est défini comme l'adhérence de $M(\Lambda)$ dans L^p. De même, l'espace M_Λ^∞ est défini comme l'adhérence de $M(\Lambda)$ dans $\mathcal{C}$.

D'une part, la condition de Müntz garantit que M_Λ^p est un sous-espace strict de L^p et M_Λ^∞ est un sous-espace strict de $\mathcal{C}$ (voir les théorèmes de Müntz Th. 1.1 et Th. 1.2). De plus, la gap-condition garantit que toute fonction $f \in M_\Lambda^p$ ou M_Λ^∞ est analytique réelle sur l'intervalle $(0,1)$ (voir le théorème de Clarkson-Erdös Th. 1.14). Les espaces de Müntz ont de nombreuses propriétés remarquables. Même si les théorèmes fondamentaux sont assez anciens, beaucoup de résultats dans ces espaces ont été découverts récemment. On pourra consulter le livre de P. Borwein et T. Erdelyi [13] ainsi que le livre de V. Gurariy et W. Lusky [31], qui sont peut-être les deux principales références d'ouvrages largement consacrés aux espaces de Müntz. De nombreux articles récents traitent ce sujet, on pourra voir par exemple [3, 4, 5, 6, 7, 8, 18, 24, 27, 25, 34, 42, 43].

Rappelons que ℓ^p est l'espace de Banach des suites $a = (a_n)_n$ telles que $\|a\|_{\ell^p} = (\sum_{n\geq 0} |a_n|^p)^{1/p} < +\infty$. L'espace ℓ^∞ est l'ensemble des suites bornées muni de la norme uniforme. Il contient deux sous-espaces séparables fermés très célèbres : l'espace c des suites $a = (a_n)_n$ qui admettent une limite quand $n \to +\infty$, et l'espace c_0 des suites qui tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. Enfin, nous notons c_{00} l'espace vectoriel des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Les espaces de Müntz M_Λ^p et M_Λ^∞ ont la propriété d'approximation (voir [31]). De plus, M_Λ^p est isomorphe à un sous-espace de ℓ^p et M_Λ^∞ est isomorphe à un sous-espace de c (voir [52]). On peut aussi montrer que M_Λ^1 est isométrique à un espace dual E^* tel que E est à distance 1 de l'ensemble des quotients de c_0 (voir [27]). De ce point de vue, les espaces de Müntz ressemblent à des espaces de suites. Mais malgré tous ces résultats positifs, les espaces M_Λ^p et M_Λ^∞ restent assez mal compris. Par exemple on ignore encore si ils admettent une base de Schauder.

Espaces de Müntz lacunaires

En général, la géométrie de l'espace M_Λ^p dépend beaucoup de la suite Λ. Si Λ est une suite lacunaire au sens de Hadamard, c'est à dire qu'il existe $r > 1$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_{n+1} \geq r\lambda_n$, alors les espaces de Müntz correspondants sont beaucoup plus explicites. On définit la *base canonique* $(e_n)_{n\geq 0}$ de ℓ^p par $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, où l'unique 1 est sur la n-ième entrée de la suite. Lorsque Λ est lacunaire, la famille de monômes normalisés $(g_n) \in M_\Lambda^p$ définie par $g_n(t) = (p\lambda_n + 1)^{1/p} t^{\lambda_n}$, est une suite *équivalente* à la base canonique de ℓ^p : il existe un isomorphisme $S : \ell^p \to M_\Lambda^p$ tel que $S(e_n) = g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir le théorème de Gurariy-Macaev 1.25). Quand l'indice de lacunarité est suffisament grand, ce résultat peut s'améliorer de la manière suivante :

Théorèmes. 2.19 et 2.25 *Soit $p \in [1, +\infty)$ et $\varepsilon \in (0, 1)$. Alors il existe $r_\varepsilon > 1$ tel que :*

Pour toute suite Λ au moins r_ε lacunaire, la famille $(g_n)_n \in M_\Lambda^p$ est $(1+\varepsilon)$-isométrique à la base canonique de ℓ^p. Cela signifie : il existe $A \in (0, 1]$ et $B \in [1, +\infty)$ tels que :

$$\forall a \in c_{00}, \qquad A\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (p\lambda_n + 1)^{\frac{1}{p}} t^{\lambda_n} \Big\|_p \leq B\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

et $B/A \leq 1 + \varepsilon$.

En fait, nous montrons ces théorèmes dans un cadre un peu plus général : le résultat reste valide si on considère des suites $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ strictement croissantes, indexées sur $\mathbb{Z}$, telles que la suite $(\lambda_n + 1/p)_{n\in\mathbb{Z}}$ est lacunaire. Il y a une sorte de symétrie entre l'accumulation des termes de la suite Λ en $+\infty$ et en $-\frac{1}{p}\cdot$ De plus, nous avons un résultat analogue lorsque $p = +\infty$. La base sommante $(f_n)_n$ de c est définie par $f_n = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots) = \sum_{k\geq n} e_k$, où le premier 1 est sur la n-ième entrée de la suite. Si Λ est lacunaire, alors la famille $(y_n) \in M_\Lambda^\infty$ des monômes donnée par $y_n(t) = t^{\lambda_n}$, est équivalente à la base sommante de c (voir le théorème de Gurariy-Macaev 1.26). Pour les suites lacunaires avec un grand indice, ce résultat s'améliore de la même façon :

Théorème. 2.30 *Soit $\varepsilon \in (0, 1)$. Alors il existe r_ε tel que :*

Pour toute suite Λ au moins r_ε-lacunaire, la famille $(y_n)_n \in M_\Lambda^\infty$ est $(1+\varepsilon)$-isométrique à la base sommante de c. Plus précisément, on a

$$\forall a \in c_{00}, \qquad \Big(\frac{1}{1+\varepsilon}\Big) \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big| \sum_{n=0}^{N} a_n \Big| \leq \Big\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{\lambda_n} \Big\|_\infty \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big| \sum_{n=0}^{N} a_n \Big|.$$

Comme dans le cas où p est fini, nous montrons un théorème plus général, qui est vrai pour des suites indexées sur $\mathbb{Z}$, mais la définition de c et de la base sommante sont légèrement différents dans ce cas.

Mesures de Carleson

Depuis quelques années, l'étude des espaces de Müntz a été envisagée du point de vue des mesures de Carleson dans [18], puis dans [43] et [42]. Nous notons $\mathcal{M}^+([0, 1))$ l'ensemble des mesures boréliennes, positives et finies sur $[0, 1]$, telles que $\mu(\{1\}) = 0$. Pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+([0, 1))$, l'espace de Banach $L^p(\mu)$ est défini comme l'ensemble des fonctions f qui sont μ-mesurables sur $[0, 1)$ telles que $\|f\|_{L^p(\mu)} = (\int_{[0,1)} |f|^p d\mu)^{1/p} < +\infty$. Lorsque μ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec une densité $w \in L^1$, l'espace $L^p(\mu)$ sera noté $L^p(w)$. On dit que μ est une mesure de Carleson de M^p_Λ si l'opérateur d'inclusion

$$J_{\mu,p} : \left\{ \begin{array}{ccc} M^p_\Lambda & \longrightarrow & L^p(\mu) \\ f & \longmapsto & f \end{array} \right.$$

est borné. Les résultats que nous trouvons peuvent s'appliquer, d'une manière classique, aux opérateurs de composition à poids de la forme $T_\psi \circ C_\varphi : M^p_\Lambda \to L^p$ (voir la Prop. 3.20). On dit que μ satisfait la condition (B_p) si les monômes normalisés $(g_n)_n \in M^p_\Lambda$ sont uniformément bornés dans $L^p(\mu)$, c'est à dire :

$$\int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu = O\Big(\frac{1}{\lambda_n}\Big), \qquad \text{quand } n \to +\infty. \tag{B_p}$$

C'est une condition nécessaire pour que μ soit une mesure de Carleson de M^p_Λ. De plus, on obtient le résultat suivant :

Théorèmes. 3.28, 3.31 *Soit Λ une suite lacunaire et $p \in (1, +\infty)$. Alors*

1) μ satisfait (B_1) si et seulement si $J_{\mu,1}$ est borné.

2) Si μ satisfait (B_p), alors $J_{\mu,q}$ est borné pour tout $q > p$.

En s'intéressant à la compacité de $J_{\mu,p}$, on obtient un résultat similaire. On dit que μ satisfait la condition (b_p) si la suite des monômes normalisés (g_n) est fortement stable dans $L^p(\mu)$, c'est à dire :

$$\int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu = o\Big(\frac{1}{\lambda_n}\Big), \qquad \text{quand } n \to +\infty. \tag{b_p}$$

Cette condition est nécessaire pour que $J_{\mu,p}$ soit compact, et elle est "presque suffisante" dans le sens suivant :

Théorèmes. 3.38, 3.40 *Soit Λ une suite lacunaire et $p \in (1, +\infty)$. Alors on a*

1) μ satisfait (b_1) si et seulement si l'opérateur $J_{\mu,1}$ est compact.

2) Si μ satisfait (b_p), alors $J_{\mu,q}$ est compact pour tout $q > p$.

Dans les articles, [18, 43] on considère des mesures *sous-linéaires* c'est à dire des mesures telles que $\mu([1-\varepsilon, 1)) = O(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$. De même, les mesures *sous linéaires évanescentes* sont les mesures telles que $\mu([1-\varepsilon, 1)) = o(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$. Les auteurs ont introduit ces classes de mesures pour trouver des conditions suffisantes de bornitude et de compacité de l'opérateur $J_{\mu,p}$. Comme les mesures sous-linéaires satisfont (B_1), nos résultats s'appliquent naturellement pour cette classe de mesures (de même pour les mesures sous-linéaires évanescentes).

On dit que Λ est *quasi-lacunaire* si c'est une union finie de suites lacunaires. Pour les suites quasi-lacunaires, nous avons les résultats suivants :

Théorèmes. 3.60, 3.61 *Soit Λ une suite quasi-lacunaire et $p \in [1, +\infty)$. Alors on a :*

1) Si μ est sous linéaire, alors c'est une mesure de Carleson de M^p_Λ.

2) Si μ est sous-linéaire évanescente, alors $J_{\mu,p}$ est compact.

Ces résultats généralisent [18, Th. 5.5, Cor. 5.7], où le cas $p = 1$ est démontré, ainsi que [43, Th.4.3, Cor. 4.5] où les auteurs traitent cas lacunaire et $p = 2$.

Nous disons que Λ est *sous-géométrique* si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda_{n+1} \le M\lambda_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et Λ est dite *quasi-géométrique* si elle est sous-géométrique et lacunaire. Dans le cas quasi-géométrique, les conditions suffisantes (B_p) sont équivalentes à la sous-linéarité.

D'autre part, en imposant des conditions géométriques plus forte sur le comportement de μ au voisinage de 1, on trouve des conditions suffisantes pour que $J_{\mu,p}$ soit un opérateur nucléaire ou pour que $J_{\mu,2}$ soit dans les classes de Schatten $\mathcal{S}^r$ (voir Définition 1.39).

Théorèmes. 3.43, 3.49 *Soit Λ une suite lacunaire.*

1) Si $\displaystyle\int_{[0,1)} \frac{1}{1-t} d\mu < +\infty$ alors $J_{\mu,2}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

2) Si Λ est quasi-géométrique, alors il existe deux constantes $C_1, C_2 \geq 0$ qui ne dépendent que de Λ (mais pas de μ) telles que :

$$C_1\Big(\int_{[0,1)} \frac{1}{1-t}d\mu\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^2} \leq C_2\Big(\int_{[0,1)} \frac{1}{1-t}d\mu\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, $J_{\mu,2} \in \mathcal{S}^2$ si et seulement si la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est μ-intégrable.

Nous avons même deux preuves assez différentes de ce résultat : l'une utilise les nombres d'approximation de $J_{\mu,2}$ et l'autre utilise la théorie des opérateurs bornés pour l'ordre. Dans l'article [43], les auteurs avaient aussi procédé à une étude approfondie du cas Hilbertien, et notamment de l'appartenance de $J_{\mu,2}$ aux classes de Schatten. Ils ont par exemple obtenu : si Λ est quasi-lacunaire et μ satisfait $\mu([1-\varepsilon,1)) = O(\varepsilon^\beta)$ avec $\beta > 1$, alors pour tout $r > 0$ l'opérateur $J_{\mu,2}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}^r$. Nous retrouvons ce résultat dans le cas où Λ est lacunaire (voir Rem. 3.44).

Opérateurs de Cesàro

Nous commençons par définir les deux opérateurs assez centraux dans la dernière partie de cette thèse. On les définit dans un premier temps sur des espaces vectoriels (sans topologie) mais l'ambiguïté sera brève. *L'opérateur de moyenne de Cesàro* est défini par :

$$\Gamma(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,$$

pour toute fonction $f \in L^1_{loc}([0,1))$, et pour $x \in (0,1)$. De même *l'opérateur de Cesàro discret* est défini par

$$\gamma(u)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k,$$

pour toute suite $u = (u_k)_{k\geq 1}$ et pour $n \in \mathbb{N}$. L'opérateur Γ stabilise l'espace L^p et γ stabilise l'espace ℓ^p pour tout $p \in (1,+\infty]$ (voir les inégalités de Hardy 4.2). De plus, on peut définir les opérateurs bornés suivants :

$$\Gamma_p : \left\{\begin{array}{ccc} L^p & \longrightarrow & L^p \\ f & \longmapsto & \Gamma(f) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \gamma_p : \left\{\begin{array}{ccc} \ell^p & \longrightarrow & \ell^p \\ u & \longmapsto & \gamma(u) \end{array}\right.$$

Rappelons que la norme essentielle $\|T\|_e$ d'un opérateur $T : X \to Y$ est la distance avec les opérateurs compacts, définie par $\|T\|_e = \inf\{\|T-K\|,\ K : X \to Y \text{ compact}\}$. Nous calculons les valeurs exactes des normes essentielles de γ_p et Γ_p.

Théorèmes. 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 *Pour tout $p \in (1,+\infty]$, on a*

$$\|\Gamma_p\|_e = \|\Gamma_p\| = \|\gamma_p\|_e = \|\gamma_p\| = p',$$

où p' est l'exposant conjugué de p défini par $p' = \frac{p}{p-1}$ si p est fini et $p' = 1$ si $p = +\infty$.

Pour calculer ces normes essentielles, nous utilisons des résultats préliminaires démontrés dans le premier chapitre de la thèse. Ce sont des lemmes qui permettent de minorer la norme essentielle d'un opérateur $T : X \to Y$ en trouvant des suites particulières dans la boule unité de X (voir Lemmes 1.45, 1.48 et Th. 1.49).

Les opérateurs de Cesàro permettent aussi de définir les espaces de Cesàro comme suit. Pour $p \in [1,+\infty]$, on définit Ces_p comme l'ensemble des fonctions f mesurables sur $[0,1]$ telles que $\Gamma(|f|) \in L^p$. C'est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\|f\|_{C(p)} = \left(\int_0^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\Big)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p \text{ est fini,}$$

et Ces_∞ est muni de la norme

$$\|f\|_{C(\infty)} = \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt.$$

On considère aussi les analogues discrets de ces espaces. L'espace Ces_1 est isométrique à $L^1(\mu)$, où μ est la mesure absolument continue donnée par $d\mu(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)dx$. D'autre part pour $p \in (1,+\infty]$, l'espace Ces_p n'est isomorphe à aucun espace L^q (voir [10]). Les espaces de Cesàro satisfont les inclusions bornées suivantes :

$$\mathcal{C} \subset \mathrm{Ces}_p \subset L^1([0,a]),$$

pour tout $a \in (0,1)$. Grâce à cette propriété, nous démontrons le théorème de Müntz dans Ces_p en utilisant uniquement le théorème de Müntz dans L^1 et dans $\mathcal{C}$. Ainsi, nous définissons *les espaces de Müntz-Cesàro* $M_\Lambda^{C(p)}$ comme l'adhérence de $M(\Lambda)$ dans Ces_p. Nous montrons que ces espaces de Müntz-Cesàro ont de nombreux points communs avec les espaces de Müntz classiques. Par exemple, les normes $\|\ .\ \|_{C(\infty)}$ et $\|\ .\ \|_1$ sont équivalentes sur $M_\Lambda^{C(\infty)}$ qui est donc isomorphe à M_Λ^1 en toute généralité. De plus lorsque Λ est lacunaire et $p \in [1,+\infty)$, nous démontrons que l'espace de Müntz-Cesàro $M_\Lambda^{C(p)}$ est isomorphe à M_Λ^p, et donc à ℓ^p (voir Th. 4.26).

La dernière partie de cette section est consacrée à l'étude des opérateurs de multiplication sur les espaces de Cesàro et sur les espaces de Müntz-Cesàro. Pour une fonction mesurable ψ sur $[0,1]$ on définit les opérateurs suivants :

$$T_\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Ces}_p & \longrightarrow & \mathrm{Ces}_p \\ f & \longmapsto & f\psi \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T_\psi^\Lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} M_\Lambda^{C(p)} & \longrightarrow & \mathrm{Ces}_p \\ f & \longmapsto & f\psi. \end{array} \right.$$

Nous calculons la norme essentielle de ces opérateurs.

Théorèmes. 4.28, 4.29, 4.32 *Soit* $p \in [1,+\infty]$ *et* ψ *une fonction mesurable.*

1) L'opérateur T_ψ *est borné sur* Ces_p *si et seulement si* $\psi \in L^\infty$.

2) Si $\psi \in L^\infty$, *alors on a*

$$\|T_\psi\|_e = \|T_\psi\| = \|\psi\|_\infty.$$

3) Si $\psi \in L^\infty$ *et qu'elle est continue en 1, alors on a*

$$\|T_\psi^\Lambda\|_e = |\psi(1)|.$$

On observe le même phénomène de concentration au voisinage du point 1 que dans les espaces de Müntz M_Λ^p ou M_Λ^∞ (voir [5]).

Plan détaillé de la thèse

Le premier chapitre contient essentiellement des résultats préliminaires dont beaucoup sont déjà connus. Nous rappelons tout d'abord les différents théorèmes de Müntz qui nous seront utiles dans ce mémoire ; dans un deuxième temps, nous rappelons les preuves d'une série (non exhaustive) d'inégalités classiques dans les espaces de Müntz ; enfin nous rappelons les estimations fondamentales dans les espaces de Müntz lacunaires. Dans le cas où la suite $(\lambda_n + 1/p)_{n\in\mathbb{Z}}$ est lacunaire, nous établissons une généralisation du théorème de Clarkson-Erdös (voir le Théorème 1.29) alors que la gap-condition n'est pas satisfaite. La seconde partie du premier chapitre est consacrée à la norme essentielle des opérateurs. Nous rappelons tout d'abord plusieurs notions autour des opérateurs compacts, ainsi que de nombreuses définitions d'idéaux d'opérateurs ; puis nous démontrons des résultats généraux qui permettent d'estimer la norme essentielle d'un opérateur $T : X \to Y$ borné entre deux espaces de Banach X et Y. Le Lemme 1.45 stipule que si l'image $T(B_X)$ de la boule unité de X contient une suite α-séparée dans Y, alors la norme essentielle de T est plus grande que $\alpha/2$. Nous verrons dans la suite plusieurs cas d'égalité de cette estimation. Pour des opérateurs de la forme $T : X \to L^p(\mu)$, nous démontrons dans le Théorème 1.49 que si il existe une suite $(h_n)_n \in B_X$ qui se concentre (dans un certain sens) sur des petits ensembles $(A_k)_k \subset \Omega$, alors on obtient aussi une minoration de la norme essentielle de T. Enfin, la troisième partie du chapitre sera consacrée à des estimations générales sur les mesures. La Proposition 1.61 est facile, mais elle sera utile pour étudier les mesures de Carleson lorsque Λ est quasi-géométrique. Le résultat principal de cette section est la Proposition 1.64 : c'est une estimation sur les nombres d'approximation d'un opérateur de plongement $T^{w,\Lambda}_{\mu,p}$ qu'on utilisera par deux fois dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux améliorations du théorème de Gurariy-Macaev. Dans la première partie du chapitre, nous étudions le plongement $S^\Lambda_p : \ell^p \to M^p_\Lambda$ défini par $S^\Lambda_p(e_n) = g_n$. En fait, nous étudions un opérateur T^Λ_p unitairement équivalent à celui ci pour alléger certaines notations. On montre qu'il est borné si et seulement si $p = 1$ ou Λ est quasi-lacunaire (voir Th. 2.10), ce qui donne une caractérisation des suites quasi-lacunaires dans le même esprit que le théorème de Gurariy-Macaev. Ensuite, grâce à des estimations multilinéaires, nous montrons que la norme de T^Λ_p est équivalente à p quand $p \to +\infty$ dans certains cas (voir Th. 2.16). Les estimations du début de chapitre servent essentiellement à démontrer le Théorème 2.25 par dualité. La deuxième section de ce chapitre contient les résultats principaux : les Théorèmes 2.19, 2.25 et 2.30 que nous avons déjà présentés, sont les raffinements des théorèmes de Gurariy-Macaev pour les suites lacunaires avec un grand indice. En séparant les trois cas $p = 1$, $p \in (1, +\infty)$ et $p = +\infty$ d'une manière systématique, nous verrons des conséquences immédiates de ces résultats. On montre que la suite $(\lambda_n + 1/p)_{n\in\mathbb{Z}}$ (resp. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) est super-lacunaire si et seulement si la famille $(g_n)_n \in M^p_\Lambda$ (resp. $(y_n)_n \in M^\infty_\Lambda$) est presque isométrique à la base canonique de ℓ^p (resp. la base sommante de c).

Dans le troisième chapitre, nous nous concentrons sur les mesures de Carleson des espaces de Müntz. Nous abordons tout d'abord le problème général, mais nous n'avons que peu de résultats. Nous trouvons une condition nécessaire (B_p), qui entraîne par ailleurs $\mu(\{1\}) = 0$, ainsi que la condition nécessaire analogue (b_p) pour que $J_{\mu,p}$ soit un opérateur compact (voir Prop. 3.4 et 3.7). Seules les mesures absolument continues sur un voisinage de 1 sont faciles à étudier : dans le cas où μ est nulle au voisinage de 1, on obtient que $J_{\mu,p}$ est un opérateur nucléaire (voir Th. 3.10) ; dans le cas où μ admet une densité h au voisinage du point 1, on rappelle une estimation de la norme essentielle de $J_{\mu,p}$ et on démontre que $J_{\mu,p}$ est un plongement inverse si $|h|^{-1}$ est essentiellement bornée. Ces deux résultats étaient déjà connus, ou essentiellement démontrés (voir [8, 12, 18, 43]). Dans la fin de cette section, nous rappelons de quelle façon les opérateurs de composition à poids (bornés) sont associés à des mesures de Carleson de M^p_Λ, et quelques résultats positifs notamment grâce au fait que la mesure image des opérateurs de composition à poids est parfois absolument continue sur un voisinage de 1. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous étudions le cas lacunaire. Nous pouvons presque caractériser les mesures de Carleson d'après les Théorèmes 3.28 et 3.31 que nous avons déjà présentés. Le Lemme 3.32 donne l'estimation fondamentale qui permet de répondre à la question de la bornitude, puis de la compacité (voir Th. 3.38 et 3.40). Tous ces résultats viennent en fait d'une estimation des nombres d'approximation de $J_{\mu,p}$ dans le cas lacunaire donnée par le Lemme 3.39 et le Théorème de Gurariy-Macaev (Th. 1.25). Ainsi, on peut caractériser l'appartenance à d'autres classes d'opérateurs qui sont définies à partir des nombres d'approximation, comme les classes de Schatten (voir Th. 3.43 et 3.47). Nous présentons aussi des estimations intégrales de la norme de Hilbert-Schmidt de $J_{\mu,2}$ lorsque Λ est quasi-géométrique, ainsi que des estimations sa norme dans $\mathcal{S}^q$ pour $q > 2$. Dans la suite, nous présentons des exemples inspirés de [18] et [43] pour montrer que l'ensemble des mesures de Carleson de M^p_Λ dépend de p en général. Plus précisément, dans l'Exemple 3.50 (resp. 3.51) nous montrons que pour p tout fixé, il existe une mesure μ et une suite Λ lacunaire satisfaisant : pour tout $q \in [1, +\infty)$, μ est une mesure de Carleson de M^q_Λ si et seulement si $q > p$ (resp. $q \geq p$). Enfin, nous établissons des inégalités générales dans les espaces de Müntz quasi-lacunaires afin de démontrer un résultat positif pour la bornitude et la compacité de $J_{\mu,p}$ dans le cas quasi-lacunaire : ce sont les Théorèmes 3.60 et 3.61 que nous avons déjà présentés. Beaucoup des résultats du cas lacunaire semblent valides dans le cas quasi-lacunaire, mais ils sont plus difficiles à démontrer et requièrent plus de calculs.

Dans le quatrième et dernier chapitre de ce mémoire, nous étudions l'opérateur de Cesàro et des questions analogues autour de ce sujet. Nous rappelons tout d'abord les définitions des espaces de Cesàro et l'inégalité correspondant à l'inclusion bornée $\mathrm{Ces}_p \subset L^1([0,a])$ pour tout $a \in (0,1)$ (voir Prop. 4.5). Puis nous prouvons que les fonctions continues sont denses dans Ces_p si $p \in [1,+\infty)$ afin de démontrer le théorème de Müntz dans les espaces de Cesàro (voir Th. 4.6 et 4.7). Nous établissons ensuite des inégalités utiles dans les espaces de Müntz-Cesàro $M_\Lambda^{C(p)}$. Ce sont des estimations analogues à celles que l'on démontre dans la partie 1.1.2 pour les espaces de Müntz classiques M_Λ^p. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous commençons par calculer les normes essentielles exactes des opérateurs de Cesàro classiques Γ_p et γ_p dans les Théorèmes 4.16, 4.17, 4.18 et 4.19 que nous avons déjà présentés. En restreignant les opérateurs Γ_p et Γ_∞ aux espaces de Müntz, on obtient des opérateurs compacts (voir Prop. 4.21). Après cela, nous nous intéressons à l'opérateur de Cesàro suivant : $\Gamma_{C(p)} : \mathrm{Ces}_p \to L^p$, et à son analogue discret $\gamma_{c(p)} : \mathrm{ces}_p \to \ell^p$. Nous montrons que ces opérateurs ont une norme essentielle égale à 1 (voir le Théorème 4.23). De plus, en restreignant $\Gamma_{C(p)}$ à l'espace de Müntz, on obtient cette fois un opérateur $\Gamma_{C(p)}^\Lambda : M_\Lambda^{C(p)} \to M_\Lambda^p$ qui n'est jamais compact, et qui est un isomorphisme si Λ est lacunaire (voir Prop. 4.25 et Th. 4.26). Enfin, nous calculons les normes essentielles exactes des opérateurs de multiplication $T_\psi : \mathrm{Ces}_p \to \mathrm{Ces}_p$, et des opérateurs de multiplication restreints aux espaces de Müntz-Cesàro $T_\psi^\Lambda : M_\Lambda^{C(p)} \to \mathrm{Ces}_p$, où ψ est une fonction essentiellement bornée. Nous obtenons les Théorèmes 4.29 et 4.32 que nous avons déjà présentés.

Chapitre 1

Résultats préliminaires

Sommaire

1.1 Espaces de Müntz **9**
1.1.1 Historique du théorème de Müntz 9
1.1.2 Inégalités dans les espaces de Müntz 14
1.1.3 Théorèmes de Gurariy-Macaev 18
1.2 Opérateurs compacts **25**
1.2.1 Différents idéaux d'opérateurs 25
1.2.2 Estimations inférieures pour la norme essentielle 28
1.3 Mesures positives sur $[0, 1]$ **33**
1.3.1 Mesures sous-linéaires et moments 33
1.3.2 Moments généralisés 38

Dans ce chapitre, nous rappelons des résultats préliminaires qui nous seront utiles dans la suite de ce mémoire. Nous commençons par établir des inégalités bien connues dans les espaces de Müntz, puis nous démontrons des estimations générales pour calculer la norme essentielle des opérateurs. En fin de chapitre, nous énonçons des propriétés de certaines mesures positives et finies sur $[0, 1]$.

1.1 Espaces de Müntz

1.1.1 Historique du théorème de Müntz

En 1885, K. Weierstrass démontre un de ses plus célèbres théorèmes : toute fonction continue sur un intervalle compact peut être approchée par des polynômes, au sens de la topologie de la norme uniforme. Ce résultat a soulevé de nombreuses questions qui se posent assez naturellement, et l'une d'entre elles va nous intéresser dans ce mémoire : pour quelles suites strictement croissantes $\Lambda = (\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ est-ce que l'espace $M(\Lambda) = Span\{t^{\lambda_0}, t^{\lambda_1}, \dots\}$ des polynômes "en t^{λ_n}" est dense dans l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $[0, 1]$? C'est H. Müntz qui a complètement répondu en 1914 :

Satz. [40] Damit die unendliche Folge der Potenzen $x^{p_0} = 1, x^{p_1}, \dots, x^{p_N}, \dots$ mit wachsenden positiven Exponenten imstande sei, jede stetige Funktion im Intervalle $0 \cdots 1$ beliebig zu approximieren, ist es notwendig und hinreichend daß $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{p_k}$ divergiere.

En français, le résultat s'énonce :

Théorème 1.1. [40] Théorème de Müntz.
Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ une suite strictement croissante. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace $Span\{1, t^{\lambda_0}, t^{\lambda_1}, \dots\}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

(ii) La suite Λ satisfait $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$.

C'est un résultat remarquable et très esthétique, qui est venu compléter plusieurs années de recherche et de résultats partiels. De plus, lorsque $\sum_{n\geq 1} 1/\lambda_n < +\infty$, on a alors : pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+ \setminus \Lambda$,

$$\inf_{f\in M(\Lambda)} \|t^\mu - f\|_\infty > 0.$$

Le Théorème de Müntz s'adapte dans L^p de la manière suivante :

Théorème 1.2. [31, Th. 6.1.4] Théorème de Müntz.
Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ une suite strictement croissante et soit $p \in [1, +\infty)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace $M(\Lambda)$ est dense dans L^p.

(ii) La suite Λ satisfait $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$.

De plus, dans le cas où $\sum_{n\geq 1} 1/\lambda_n < +\infty$, alors pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+ \setminus \Lambda$ on a

$$\inf_{f\in M(\Lambda)} \|t^\mu - f\|_p > 0.$$

Remarque 1.3. Les fonctions constantes jouent un rôle particulier pour la densité de $M(\Lambda)$ dans $\mathcal{C}$: si $0 \notin \Lambda$ alors l'espace $M(\Lambda)$ est constitué uniquement de fonctions qui s'annulent au point 0, et on a donc $M(\Lambda) \subset \mathcal{C}_0$. Comme $\mathcal{C}_0$ est fermé dans $\mathcal{C}$, alors $M(\Lambda)$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}$. Si on suppose au contraire $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$, alors le Théorème 1.1 reste vrai en remplaçant dans l'assertion (ii), l'espace $Span(1, t^{\lambda_0}, t^{\lambda_1}, \ldots)$ par $M(\Lambda)$ et en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}_0$. C'est l'approche employée par les auteurs dans [31].

Ces deux théorèmes reposent sur des inégalités très précises et calculatoires. On pourra trouver des preuves du théorème de Müntz dans [9], [13], [31] ou [34]. L'inégalité suivante est le point clef de la preuve du sens "seulement si" :

Lemme 1.4. [31, Prop. 6.1.4] *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante satisfaisant la condition de Müntz*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_n > 0$ telle que

$$|a_n| \leq C_n \|f\|_1, \tag{1.1}$$

pour tout polynôme $f(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^{\lambda_k}$.

Et le lemme suivant permet de prouver le sens "si" à l'aide du théorème de Weierstrass.

Lemme 1.5. [28] *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante telle que :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(f_n)_n \in M(\Lambda)$ telle que

$$\|f_n - t^k\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque 1.6. L'inégalité (1.1) signifie que la suite $(t^{\lambda_n})_n$ est minimale dans L^1, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{dist}_{L^1}(t^{\lambda_n}, Span\{t^{\lambda_k}, k \neq n\}) > 0$. En effet, pour une fonction $f \in M(\Lambda)$ de la forme $f(t) = t^{\lambda_n} + h(t)$ avec $h(t) \in M(\Lambda \setminus \lambda_n)$, on a d'après le Lemme 1.4 :

$$\|t^{\lambda_n} - h\|_1 = \|f\|_1 \geq \frac{1}{C_n}.$$

Nous avons cité le livre de Gurariy-Lusky, mais on peut aussi démontrer (1.1) avec des méthodes Hilbertiennes comme dans [9] ou [13] : on démontre d'abord que (t^{λ_n}) est minimale dans L^2 puis on en déduit (1.1) à l'aide de l'opérateur de Volterra. En effet, posons $\Lambda' = (\lambda'_n)_n$, où $\lambda'_n = \lambda_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'opérateur de Volterra V est défini par :

$$V(g)(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

Pour toute fonction $g \in L^1$, on a $\|V(g)\|_\infty \leq \|g\|_1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout polynôme $f \in \mathrm{Span}\{t^{\lambda_k}, k \neq n\}$, on a $V(f) \in M(\Lambda' \setminus \lambda'_n)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\|t^{\lambda_n} - f\|_1 &\geq \|V(t^{\lambda_n}) - V(f)\|_\infty \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n + 1}\|t^{\lambda_n + 1} - (\lambda_n + 1)V(f)\|_2 \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n + 1}\mathrm{dist}_{L^2}(t^{\lambda_n + 1}, M(\Lambda' \setminus \lambda'_n)).
\end{aligned}$$

Ainsi, la minimalité de la suite $t^{\lambda'_n}$ dans L^2 permet de conclure (1.1). Dans tous les cas, le résultat repose finalement sur la majoration fine d'un produit infini de la forme :

$$\prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \neq n}} \frac{\lambda_n + \lambda_k + 1}{|\lambda_n - \lambda_k|},$$

grâce aux hypothèses sur Λ. La plupart des preuves du théorème de Müntz se ramènent à une estimation de ce type.

Nous pouvons maintenant définir les espaces de Müntz :

Définition 1.7. Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante et $p \in [1, +\infty]$. On dit que Λ satisfait la *condition de Müntz* lorsque l'on a :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty.$$

Dans ce cas, on définit *l'espace de Müntz* M_Λ^p par

$$M_\Lambda^p = \mathrm{Adh}\big(M(\Lambda), \| \,.\, \|_p\big).$$

On a bien sûr $M_\Lambda^p \subsetneq L^p$ et $M_\Lambda^\infty \subsetneq \mathcal{C}$. De plus pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto t^\mu$ appartient à l'espace M_Λ^p si et seulement si $\mu \in \Lambda$. Mais l'histoire ne s'arrête pas là : en 1943, J.A. Clarkson et P. Erdös [19] firent une découverte beaucoup plus précise : si $\Lambda \subset \mathbb{N}$ satisfait la condition de Müntz, alors toute fonction $f \in M_\Lambda^\infty$ admet un prolongement analytique $\widetilde{f}$ sur le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, et $\widetilde{f}$ est de la forme :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad \widetilde{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^{\lambda_n}.$$

Ceci est le théorème de Clarkson-Erdös, il peut se démontrer en raffinant l'inégalité de la minimalité du système t^{λ_n}. Le théorème de Clarkson-Erdös a été généralisé par L. Schwartz dans sa thèse [49] en 1943 : soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ une suite satisfaisant la *gap-condition* suivante

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0.$$

Alors toute fonction $f \in M_\Lambda^p$, il existe une fonction $\widetilde{f}$ analytique sur $(0,1)$ qui est égale à f presque partout, et $\widetilde{f}$ est de la forme

$$\forall t \in [0,1), \quad \widetilde{f}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^{\lambda_n}.$$

En particulier, on peut définir sans ambiguïté la quantité $f(x)$, lorsque $x \in [0,1)$ et $f \in M_\Lambda^p$. Nous parlerons plus en détails de ces résultats dans la partie suivante (voir Th. 1.14), il est bien plus commode d'exprimer ces propriétés avec des inégalités.

En 1916, c'est à dire deux ans après la publication du théorème de Müntz, O. Szász généralise partiellement le Théorème 1.1 pour les suites $\Lambda \subset \mathbb{C}_0$, où $\mathbb{C}_0$ est l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement positive (voir [51]). Son approche permet d'une part de caractériser les suites complexes $\Lambda \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ telles que $M(\Lambda)$ est dense dans L^2, et d'autre part de donner une condition nécessaire et une condition suffisante pour que l'espace $\mathrm{Span}\{1, t^{\lambda_0}, t^{\lambda_1}, \ldots\}$ soit dense dans $\mathcal{C}$. En 1972, A.R. Siegel a amélioré les résultats de Szász. En particulier il obtient un critère de densité pour les suites $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$:

Théorème 1.8. [50] *Soit* $\Lambda = (\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le système $\mathrm{Span}\{1, t^{\lambda_0}, t^{\lambda_1}, \ldots\}$ *est dense dans* $\mathcal{C}$.

(ii) La suite Λ *satisfait :*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + 1} = +\infty.$$

Si la suite Λ admet un minorant strictement positif, il est clair que cette condition est équivalente à la condition de Müntz de la Définition 1.7. Le Théorème 1.8 est parfois appelé le *Full-Müntz theorem* dans $\mathcal{C}$. On voit une sorte de principe de symétrie de l'accumulation des termes $(\lambda_n)_n$ en 0 et en $+\infty$ pour caractériser la densité de $M(\Lambda)$. Aujourd'hui encore il n'existe pas de caractérisation complète des suites complexes $\Lambda \subset \mathbb{C}_0$ telles que $M(\Lambda)$ est dense dans $\mathcal{C}$. Par ailleurs, T. Erdelyi a aussi étudié les propriétés de l'espace de Müntz M_Λ^∞ dans le cas non-dense (voir [23]). Il a généralisé le théorème de Clarkson-Erdös dans un sens un peu plus faible, lorsque la gap-condition n'est pas satisfaite (par exemple quand 0 est une valeur d'adhérence de Λ).

De même, le "Full Müntz theorem" se généralise dans L^p, et la preuve est due à V. Operstein en 1995.

Théorème 1.9. [44] *Soit* $\Lambda = (\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'espace $M(\Lambda)$ *est dense dans* L^p.

(ii) La suite Λ *satisfait :*

$$\sum_n \frac{\lambda_n + \frac{1}{p}}{(\lambda_n + \frac{1}{p})^2 + 1} = +\infty.$$

Le résultat était alors déjà connu dans L^2 (dû à O. Szász en 1916) ainsi que dans L^1 (dû à P. Borwein et T. Erdelyi dans les années 90).

On peut aussi chercher à généraliser le théorème de Müntz dans d'autres espaces de fonctions sur un compact. En 2005, V. Gurariy et W. Lusky ont écrit un livre [31], dans lequel ils étudient de nombreuses propriétés géométriques des espaces de Müntz. Leur démarche permet de caractériser la densité de $M(\Lambda)$ dans des espaces de fonctions dans lesquels les opérateurs de blow-up sont bornés, qui généralisent les espaces L^p et $\mathcal{C}_0$.

Théorème 1.10. [31, Th. 6.1.5] *Soit* $\Lambda = (\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^*$ *une suite strictement croissante telle que* $\lambda_n \to +\infty$. *Soit* X *un espace de Banach qui contient continûment* $\mathcal{C}_0$ *et tel que* $\mathcal{C}_0$ *est*

est dense dans X. On suppose que pour tout $\rho \in (0,1)$ l'opérateur $C_\rho : X \to X$ défini par $C_\rho(f)(x) = f(\rho x)$ est borné, et qu'on a

$$\forall \rho_0 \in (0,1), \sup_{\rho \in [\rho_0, 1)} \|C_\rho\| < +\infty.$$

Pour écarter le cas où X est isomorphe à un espace de Müntz, nous supposons aussi qu'il existe $\mu > 0$ avec $\mu \notin \Lambda$, tel que $\|t^\mu\|_X \neq 0$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace $M(\Lambda)$ est dense dans X ;

(ii) la suite Λ satisfait $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$.

Pour des raisons de lisibilité, nous avons ici choisi d'appeler "C_ρ" les opérateurs de blow-up, mais ils sont notés "T_ρ" dans [27, 31]. Dans ce mémoire les opérateurs T désigneront plutôt des opérateurs de multiplication.

Exemple 1.11. Ce théorème s'applique dans les espaces d'Orlicz et de Cesáro.

1) Espaces d'Orlicz.
Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une fonction convexe croissante, telle que $\psi(0) = 0$. On définit la norme de Luxembourg :

$$\|f\|_{L^\psi} := \inf \Big\{ M > 0, \int_0^1 \psi(\frac{|f(t)|}{M}) dt \leq 1 \Big\}.$$

L'espace d'Orlicz L^ψ est l'ensemble des fonctions f mesurables sur $[0,1]$ telles que $\|f\|_{L^\psi} < +\infty$. Ces espaces généralisent les espaces L^p (resp. L^∞) car en prenant la fonction $\psi(x) = x^p$ (resp. $\psi = 0$ sur $[0,1]$ et $\psi = +\infty$ sur $(1, +\infty)$), alors la norme de Luxembourg $\| \ . \ \|_{L^\psi}$ est égale à la norme $\| \ . \ \|_p$ (resp. à la norme uniforme). Les fonctions continues ne sont pas toujours denses dans L^ψ, mais on peut appliquer le Théorème 1.10 dans l'espace de Morse-Transue $\mathcal{M}^\psi$ défini comme l'adhérence de $\mathcal{C}_0$ dans L^ψ. En effet, pour $\rho \in (0,1)$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi(\frac{|f(\rho t)|}{M}) dt &= \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \psi(\frac{|f(t)|}{M}) dt \\ &\leq \frac{1}{\rho} \int_0^1 \psi(\frac{|f(t)|}{M}) dt,\end{aligned}$$

et ainsi si $\|f\|_{L^\psi} = M$, on a

$$\int_0^1 \psi(\frac{|C_\rho f(t)|}{M}) dt \leq \frac{1}{\rho}.$$

Comme ψ est convexe, $\psi(0) = 0$ et $\rho \in (0,1)$, on a $\psi(\rho x) \leq \rho \psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et on obtient :

$$\int_0^1 \psi\big(\rho \frac{|C_\rho f(t)|}{M}\big) dt \leq 1,$$

Alors on a $\|C_\rho(f)\|_{L^\psi} \leq \frac{1}{\rho} \|f\|_{L^\psi}$ et ainsi, d'après 1.10, le théorème de Müntz s'applique dans $\mathcal{M}^\psi$. On pourra se référer à la thèse de I. Al Alam [5] pour plus de résultats dans les espaces de Müntz-Orlicz.

2) Espaces de Cesàro.
Soit $p \in [1, +\infty]$, et Γ l'opérateur de Cesàro défini pour $g \in L^1_{loc}([0,1))$ par :

$$\Gamma(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt,$$

pour tout $x \in (0,1)$. L'espace de Cesàro Ces_p est l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $\Gamma\big(|f|\big) \in L^p$. C'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_{C(p)} = \big\|\Gamma(|f|)\big\|_p$. Nous nous intéresserons de plus près à ces espaces dans le dernier chapitre (voir la Partie 4.1). Pour $p \in [1,+\infty)$ (resp. $p = +\infty$), les fonctions continues sont denses dans Ces_p (resp. dans l'adhérence de $\mathcal{C}$ dans Ces_∞). De plus pour tout $\rho \in (0,1)$ on a

$$\begin{aligned}\|C_\rho(f)\|_{C(p)} &= \left(\int_0^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f(\rho t)|dt\Big)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\rho}\left(\int_0^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^{x\rho} |f(t)|dt\Big)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \frac{\|f\|_{C(p)}}{\rho}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|C_\rho(f)\|_{C(\infty)} = \sup_x \frac{1}{x\rho}\int_0^{x\rho} |f(t)|dt \le \frac{1}{\rho}\|f\|_{C(\infty)}.$$

Ainsi le théorème de Müntz 1.10 s'applique dans les espaces de Cesàro.

Nous signalons pour finir, que L. Schwartz a démontré un full-Müntz theorem dans $\mathcal{C}([a,b])$ lorsque $a > 0$ (voir [9, Th. 29]) : soit $\Lambda = (\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ une suite de nombres distincts. Alors l'espace $M(\Lambda)$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$ si et seulement si Λ satisfait

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|\lambda_n|} = +\infty.$$

Les fonctions constantes ne jouent pas un rôle particulier pour cette question.

Dans leur livre (voir [13, p.311]), P. Borwein et T. Edelyi ont aussi démontré un théorème de Müntz pour les espaces $L^p(w)$, où $w \in L^1([0,1])$ est un poids positif et $p \in [1,+\infty)$. Pour une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\ge 0}$ strictement croissante, l'espace $M(\Lambda)$ est dense dans $L^p(w)$ si et seulement si

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty.$$

Les espaces $L^p(w)$ ne sont pas des espaces dans lesquels les opérateurs de blow-up sont bornés en général. Néanmoins, le critère de densité de $M(\Lambda)$ est le même que dans le théorème 1.10.

1.1.2 Inégalités dans les espaces de Müntz

Dans cette partie comme souvent dans la suite, nous supposerons que $\Lambda = (\lambda_n)_{n\ge 0}$ est une suite strictement croissante qui satisfait la condition de Müntz

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty,$$

ainsi que la gap-condition

$$\inf_{n\ge 0} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0.$$

Nous allons redémontrer des inégalités bien connues dans les espaces de Müntz M_Λ^p quand Λ satisfait ces deux hypothèses. Ces inégalités nous seront utiles dans la suite de ce mémoire. Tout d'abord, nous admettons le résultat technique suivant.

Théorème 1.12. [34] *Soit Λ satisfaisant le critère de Müntz et la gap-condition. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$|a_n| \le K_\varepsilon (1+\varepsilon)^{\lambda_n} \|f\|_1, \tag{1.2}$$

pour tout $f(t) = \sum_k a_k t^{\lambda_k} \in M(\Lambda)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.13. En comparant le résultat qui précède avec l'inégalité du Lemme 1.4, il s'agit de contrôler plus explicitement la constante C_n en question, grâce à l'hypothèse supplémentaire sur Λ. Par ailleurs, comme on l'a vu dans la Remarque 1.6, on peut prouver (1.2) en montrant que pout tout $\Lambda' = (\lambda'_n)_n$ satisfaisant les conditions, il existe une constante $K'_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$|a_n| \leq K'_\varepsilon (1+\varepsilon)^{\lambda'_n} \|f\|_2,$$

pour toute fonction $f \in M(\Lambda)$ de la forme $f(t) = \sum_k a_k t^{\lambda'_k}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis en utilisant l'opérateur de Volterra, on en déduit (1.2).

Les résultats que nous verrons dans la suite de cette sous-section sont des conséquences du Théorème 1.12. Nous commençons par le fameux théorème de Clarkson-Erdös :

Théorème 1.14. [19], [49, p.36-37] *Soit $p \in [1, +\infty)$ (resp. $p = +\infty$) et $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$ satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition $\inf_{k\geq 0}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$. Alors pour une fonction $f \in L^p$ (resp. $f \in \mathcal{C}$), les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in M_\Lambda^p$ (resp. $f \in M_\Lambda^\infty$).

(ii) Il existe une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}$ telle que la série entière suivante

$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\lambda_n} \tag{1.3}$$

converge uniformément sur tout compact de $[0, 1)$, et $f = \widetilde{f}$ presque partout.

Remarque 1.15. 1) L'approche de L. Schwartz pour démontrer ce résultat est légèrement différente de celle que l'on propose dans ce mémoire. J.A. Clarkson et P. Erdös on démontré avant lui le cas $\Lambda \subset \mathbb{N}$ et $p = +\infty$ (voir [19]). On pourra aussi trouver des preuves plus classiques de ce résultat dans [9], [13], [31], [34] ou adapter la preuve du Théorème 1.29 dans la suite. Le théorème de Clarkson-Erdös-Schwartz signifie en particulier que les fonctions de l'espace de Müntz M_Λ^p admettent un représentant analytique “en t^{λ_n}” sur $(0, 1)$. Comme l'avait remarqué L. Schwartz, si $f \in M_\Lambda^p$ alors elle peut se prolonger en une fonction $f(z), z = re^{i\theta}$ sur tout le domaine de la surface de Riemann de $\log(z)$ défini par $r < 1$. Dans le cas particulier où $\Lambda \subset \mathbb{N}$, alors ce prolongement est tout simplement une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

2) Si Λ satisfait le critère de Müntz et la gap-condition, alors les fonctions de l'espace de Müntz sont caractérisées par une condition topologique ($f \in L^p$) et une condition algébrique (1.3). À cause de cette condition algébrique, il est assez difficile de trouver des opérateurs naturels $T : L^p \to L^p$ qui satisfont $T(M_\Lambda^p) \subset M_\Lambda^p$. Mais il y en a tout de même quelques uns. Nous verrons par exemple l'opérateur de Cesàro, et les opérateurs de blow-up : ce sont les opérateurs de composition par une homothétie de rapport $\rho \in (0, 1)$.

3) En général, si Λ ne satisfait pas la gap-condition, on ne peut pas écrire f comme une série entière en t^{λ_n}, un contre-exemple est considéré dans [5, Rem. 1.2.5]. Mais nous verrons dans la suite un cas particulier où le théorème de Clarkson-Erdös est vrai alors que $-1/p$ est une valeur d'adhérence de Λ (voir Théorème 1.29).

Proposition 1.16. [13, E.3.d] *Soit Λ satisfaisant le critère de Müntz et la gap-condition. Alors il existe C_ε et C'_ε tels que l'on a une inégalité de type Chebychev :*

$$\|f\|_{[0,1-\varepsilon]} \leq C_\varepsilon \|f\|_1, \tag{1.4}$$

et une inégalité de type Bernstein :

$$\|f'\|_{[0,1-\varepsilon]} \leq C'_\varepsilon \|f\|_1, \tag{1.5}$$

pour tout $f \in M(\Lambda)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ un nombre tel que $\gamma = (1+\delta)(1-\varepsilon) < 1$. D'après le Théorème 1.12, il existe une constante K_δ satisfaisant

$$|a_n| \leq K_\delta (1+\delta)^{\lambda_n} \|f\|_1,$$

pour tout $f \in M(\Lambda)$ de la forme $f(t) = \sum_k a_k t^{\lambda_k}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\|f'\|_{[0,1-\varepsilon]} &= \sup_{t\in[0,1-\varepsilon]} \Big| \sum_n a_n \lambda_n t^{\lambda_n - 1} \Big| \\
&\leq \sum_n |a_n| \lambda_n (1-\varepsilon)^{\lambda_n - 1} \\
&\leq \Big(\sum_{n\geq 0} \lambda_n \gamma^{\lambda_n} \Big) \frac{K_\delta}{1-\varepsilon} \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Comme $\gamma < 1$, la série de terme général $\lambda_n \gamma^{\lambda_n}$ converge et on obtient l'inégalité de type Bernstein. Nous démontrons maintenant (1.4). Pour $t \in [0, 1-\varepsilon]$, on a

$$\begin{aligned}
|f(t)| &= \Big| f(0) + \int_0^t f'(u)du \Big| \\
&\leq |f(0)| + C'_\varepsilon \|f\|_1,
\end{aligned}$$

d'après (1.5). Si $f(0) = 0$, la preuve est terminée. Si $f(0) \neq 0$, alors $\lambda_0 = 0$ et $f(0)$ est égal au premier coefficient de f dans la base $(t^{\lambda_n})_n$. On a donc :

$$|f(0)| = |a_0| \leq K_\delta (1+\delta)^0 \|f\|_1,$$

et on obtient donc l'inégalité de type Chebychev en posant $C_\varepsilon = K_\delta + C'_\varepsilon$. □

Pour des polynômes “classiques” $f \in \mathbb{C}[X]$, on peut obtenir des estimations similaires à celles de la Proposition 1.16, mais la constante C_ε doit aussi dépendre du degré de f.

Remarque 1.17. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, les mesures de Dirac $(\delta_x)_{x\in[0,1)}$ définies par

$$\delta_x : \left\{ \begin{array}{ccc} M^p_\Lambda & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x), \end{array} \right.$$

sont des formes linéaires, et leurs normes sont uniformément bornées sur les compacts de $[0,1)$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} \|\delta_x\|_{(M^p_\Lambda)^*} \leq C_\varepsilon,$$

d'après la Proposition 1.16.

D'autre part, on a une autre famille naturelle de formes linéaires sur M^p_Λ. D'après le Théorème 1.12, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la forme linéaire

$$a_n^* : \left\{ \begin{array}{ccc} M(\Lambda) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \displaystyle\sum_k b_k t^{\lambda_k} & \longmapsto & b_n, \end{array} \right.$$

se prolonge en une forme linéaire continue $a_n^* : M^p_\Lambda \to \mathbb{C}$ qui satisfait

$$\|a_n^*\|_{(M^p_\Lambda)^*} \leq K_\varepsilon (1+\varepsilon)^{\lambda_n}.$$

De ces inégalités, on peut déduire la propriété suivante :

Corollaire 1.18. [8, Cor. 2.5] *Pour toute suite bornée $(f_n)_n \in M^p_\Lambda$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge uniformément sur tout compact de $[0,1)$ vers une fonction $g \in L^p$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans M^p_Λ. Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la Prop. 1.16, la suite $(f_n)_n$ est bornée et équicontinue sur le compact $[0, 1-\varepsilon]$. D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, il existe une extraction $(n_k)_k$ telle que (f_{n_k}) converge uniformément sur $[0, 1-\varepsilon]$.

Par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$, on construit une suite $(\varphi_j(n))_n$ extraite de $(\varphi_{j-1}(n))_n$, telle que $(f_{\varphi_j(n)})_n$ converge uniformément sur $[1, 1-1/j]$ vers une fonction $g^{(j)}$. Quitte à extraire encore, on peut supposer par récurrence, que pour tout j on a $\varphi_j(j) > \varphi_{j-1}(j-1)$, et que $f_{\varphi_j(j)}$ est déjà proche de sa limite, c'est à dire :

$$\|f_{\varphi_j(j)} - g^{(j)}\|_{[0,1-1/j]} \leq \frac{1}{j}.$$

Alors par construction, la suite $(f_{\varphi_n(n)})_n$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction $g = \lim_{j\to+\infty} g^{(j)}$. Enfin, d'après le lemme de Fatou on obtient $\|g\|_p \leq \sup_n \|f_n\|_p$. □

Dans les espaces de Müntz, le comportement des fonctions se concentre au voisinage du point 1, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 1.19. *Soient $\varepsilon \in (0, 1)$ et $p \in [1, +\infty)$. Alors il existe $C \in (0, 1)$ tel que :*

$$C\|f\|_p \leq \Big(\int_{1-\varepsilon}^1 |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p,$$

et il existe $C' \in (0, 1)$ tel que

$$C'\|f\|_\infty \leq \|f\|_{[1-\varepsilon,1]} \leq \|f\|_\infty,$$

pour toute fonction $f \in M(\Lambda)$. En d'autres termes, les normes $\| \, . \, \|_p$ et $\| \, . \, \|_{L^p([1-\varepsilon,1])}$ (resp. $\| \, . \, \|_\infty$ et $\| \, . \, \|_{[1-\varepsilon,1]}$) sont équivalentes sur M^p_Λ (resp. M^∞_Λ).

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit δ tel que $\gamma = (1+\delta)(1-\varepsilon) < 1$. D'après le Théorème 1.12, il existe une constante $K_\delta \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_n| \leq K_\delta(1+\delta)^{\lambda_n}\|f\|_p,$$

pour toute fonction $f(t) = \sum_k a_k t^{\lambda_k} \in M(\Lambda)$. On pose $\Lambda_m = Span\{t^{\lambda_k}, k \geq m\}$ et $\Lambda'_m = Span\{t^{\lambda_k}, 0 \leq k < m\}$. Comme $M(\Lambda'_m)$ est de dimension finie et $M^p_\Lambda = M(\Lambda'_m) \oplus M^p_{\Lambda_m}$, il suffit de démontrer que les normes $\| \, . \, \|_p$ et $\| \, . \, \|_{L^p([1-\varepsilon,1])}$ sont équivalentes sut $M^p_{\Lambda_m}$. Supposons tout d'abord que p est fini et fixons $f \in M(\Lambda_m)$. On a

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_0^{1-\varepsilon} \Big|\sum_{n\geq m} a_n t^{\lambda_n}\Big|^p dt + \int_{1-\varepsilon}^1 |f(t)|^p dt \\
&\leq K_\delta^p\Big(\sum_{n=m}^{+\infty} \big((1+\delta)(1-\varepsilon)\big)^{\lambda_n}\Big)^p \|f\|_p^p + \|f\|^p_{L^p([1-\varepsilon,1])} \\
&\leq K_\delta^p\Big(\frac{\gamma^{\lambda_m}}{1-\gamma}\Big)^p \|f\|_p^p + \|f\|^p_{L^p([1-\varepsilon,1])}.
\end{aligned}$$

On choisi m tel que $\gamma' = \dfrac{K_\delta \gamma^{\lambda_m}}{1-\gamma} < 1$, et on obtient alors :

$$\forall f \in M(\Lambda_m), \quad \|f\|_{L^p([1-\varepsilon,1])} \geq \|f\|_p(1-\gamma'^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour le cas $p = +\infty$, c'est le même calcul. Pour $f \in M(\Lambda_m)$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1-\varepsilon]} |f(t)| &\leq K_\delta \sum_{n\geq m} \gamma^{\lambda_n}\|f\|_\infty \\
&\leq \gamma'\|f\|_\infty \\
&< \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient pour tout polynôme $f \in M(\Lambda_m)$:

$$\|f\|_\infty = \max\left\{ \sup_{t\in[0,1-\varepsilon]} |f(t)|\ ,\ \sup_{t\in[1-\varepsilon,1]} |f(t)| \right\} = \|f\|_{[1-\varepsilon,1]}.$$

□

Il est parfois utile de se retreindre à un voisinage de 1 sans perte de généralité. Nous finissons cette partie par la propriété suivante, qui a été par exemple remarquée dans [7].

Proposition 1.20. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p < q$. Alors l'opérateur d'inclusion suivant*

$$i_{q,p} : \left\{ \begin{array}{ccc} M_\Lambda^q & \longrightarrow & M_\Lambda^p \\ f & \longmapsto & f \end{array} \right.$$

est bien défini, borné et compact.

Démonstration. Comme l'opérateur d'inclusion $J_{q,p} : L^q \to L^p$ est borné et qu'il satisfait $J_{q,p}(M(\Lambda)) = M(\Lambda)$, on obtient :

$$M_\Lambda^q = J_{q,p}(\overline{M(\Lambda)}^{L^q}) \subset \overline{J_{q,p}(M(\Lambda))}^{L^p} = M_\Lambda^p.$$

Ainsi, $i_{q,p}$ est bien défini, et il est borné car c'est la restriction de $J_{q,p}$. Pour montrer que $i_{q,p}$ est compact, on considère une famille $(f_n)_n$ une suite dans la boule unité de M_Λ^q. D'après le Corollaire 1.18, il existe une fonction $g \in L^q$ et une extraction $(n_k)_k$ tel que $(f_{n_k})_k$ converge vers g uniformément sur tout compact de $[0, 1)$. Rappelons que p est fini, ainsi pour tout $\delta \in (0, 1)$, on a

$$\begin{aligned} \|f_{n_k} - g\|_p^p &= \int_0^{1-\delta} |f_{n_k}(t) - g(t)|^p dt + \int_{1-\delta}^1 |f_{n_k}(t) - g(t)|^p dt \\ &\leq \|f_{n_k} - g\|_{[0,1-\delta]}^p + \|f_{n_k} - g\|_q^p \delta^{1-\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder. Comme (f_{n_k}) converge uniformément vers g sur $[0, 1-\delta]$, on obtient :

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_{n_k} - g\|_p \leq 2\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Comme $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$ et δ est arbitraire, la suite (f_{n_k}) converge donc vers g dans M_Λ^p, et ainsi l'opérateur $i_{q,p}$ est compact. □

1.1.3 Théorèmes de Gurariy-Macaev

En 1966, V. Gurariy et V. Macaev ont caractérisé les suites Λ telles que la famille normalisée $(g_n)_n \in M_\Lambda^p$ définie par $g_n(t) = (p\lambda_n + 1)^{1/p} t^{\lambda_n}$, est une base de Schauder de l'espace de Müntz M_Λ^p. Pour énoncer clairement leur résultat, nous définissons quelques notions pour des suites de nombres et des suites de vecteurs.

Définition 1.21. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite strictement croissante.
On dit que $(u_n)_n$ est *lacunaire* si il existe $r > 1$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad u_{n+1} \geq r u_n.$$

La suite $(u_n)_n$ est dite *quasi-lacunaire* si il existe une extraction $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ strictement croissante satisfaisant $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \big(n_{k+1} - n_k\big) \leq N < +\infty$ et un nombre $r > 1$ tel qu'on a

$$\forall k \in \mathbb{Z},\quad u_{n_k+1} \geq r u_{n_k}.$$

Enfin, nous dirons que $(u_n)_n$ est *sous-géométrique* si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M.$$

Dans le chapitre 3, nous utiliserons la terminologie *quasi-géométrique* pour désigner les suites à la fois lacunaires et sous-géométriques.

On peut caractériser les suites quasi-lacunaires de la manière suivante :

Proposition 1.22. [31, Prop. 7.1.3] *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}_+^*$ une suite strictement croissante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) la suite $(u_n)_n$ est quasi-lacunaire ;

(ii) l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une union finie d'ensembles lacunaires.

(iii) il existe une extraction $(m_k)_k \in \mathbb{Z}$ strictement croissante, qui satisfait

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \big(m_{k+1} - m_k\big) \leq N < +\infty,$$

et telle que la suite $(u_{m_k})_k$ est lacunaire.

Nous définissons aussi quelques notions de bases :

Définition 1.23. Soit X un espace de Banach et $(x_n)_n \in X$. On dit que $(x_n)_n$ est :

1) *complète* si $Span\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X ;
2) *séparée* si on a $\inf\{\|x_n - x_m\|, n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\} > 0$;
3) *minimale* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\inf\Big\{\|x_n - g\|, \quad g \in Span\{x_k, k \neq n\}\Big\} > 0 \quad ;$$

4) *uniformément minimale* si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\inf\Big\{\|x_n - g\|, \quad g \in Span\{x_k, k \neq n\}\Big\} \geq \delta \quad ;$$

5) *basique* si il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ satisfaisant $m \leq n$, pour tout $a = (a_n)_n \in c_{00}$, on a

$$\Big\|\sum_{n=0}^{m} a_k x_k\Big\| \leq K \Big\|\sum_{k=0}^{n} a_k x_k\Big\|.$$

Si une suite $(x_n)_n$ est normalisée, alors on a en toute généralité :

$$(x_n) \text{ basique } \Rightarrow (x_n) \text{ uniformément minimale } \Rightarrow (x_n) \text{ séparée.}$$

Soient $x = (x_n)_n \in X$ et $y = (y_n)_n \in Y$ deux suites de vecteurs. Définissons les espaces S_x et S_y suivants :

$$S_x = \mathrm{Adh}(Span\{x_n, n \in \mathbb{N}\}, \| \ . \ \|_X) \quad \text{et} \quad S_y = \mathrm{Adh}(Span\{y_n, n \in \mathbb{N}\}, \| \ . \ \|_Y).$$

Les suites (x_n) et (y_n) sont *équivalentes* si il existe un opérateur $T : S_x \to S_y$ qui est borné et inversible, et tel que $T(x_n) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On pourra consulter [31] ou [37] pour plus de détails sur ces notions.

Exemple 1.24. Soit H est un espace de Hilbert séparable et $(x_n)_n$ une suite de vecteurs dans H. On dit que $(x_n)_n$ est une base de Riesz de H si $Span\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans H, et s'il existe deux constantes C_1, C_2 telles que l'on a

$$\forall a \in c_{00}, \quad C_1\Big(\sum_n |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\|\sum_n a_n x_n\Big\|_H \leq C_2\Big(\sum_n |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Les bases de Riesz sont les suites complètes, et équivalentes à la base canonique de ℓ^2. De telle suites sont basiques dans H.

Maintenant nous pouvons énoncer les théorèmes de Gurariy-Macaev.

Théorème 1.25. [32, Th. 1] Théorème de Gurariy-Macaev dans L^p
Soit $p \in [1, +\infty)$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset (-\frac{1}{p}, +\infty)$ une suite croissante. On note $(g_n)_n \in M^p_\Lambda$ la suite des monômes normalisés définie par $g_n(t) = (p\lambda_n + 1)^{1/p} t^{\lambda_n}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite $(\lambda_n + 1/p)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ est lacunaire ;

(ii) La suite $(g_n)_n$ est séparée dans L^p ;

(iii) La suite $(g_n)_n$ est uniformément minimale dans L^p ;

(iv) La suite $(g_n)_n \in L^p$ est basique ;

(v) La suite $(g_n)_n \in L^p$ est équivalente à la base canonique de ℓ^p.

Dans $\mathcal{C}$, le résultat est assez similaire :

Théorème 1.26. [32, Th. 2] Théorème Gurariy-Macaev dans $\mathcal{C}$
Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite strictement croissante et $(y_n)_n$ la suite des monômes définie par $y_n(t) = t^{\lambda_n}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ est lacunaire ;

(ii) La suite $(y_n)_n$ est séparée dans $\mathcal{C}$;

(iii) La suite $(y_n)_n$ est uniformément minimale dans $\mathcal{C}$;

(iv) La suite $(y_n)_n \in \mathcal{C}$ est basique ;

(v) La suite $(y_n)_n \in \mathcal{C}$ est équivalente à la base sommante de c.

Remarque 1.27. L'espace $c \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$ considéré ici est l'espace des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}$ telles que $v_n \to 0$ quand $n \to -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ existe. La base sommante de c est la famille $(f_n)_n \in c$ définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par $f_n = (\ldots, 0, 0, 1, 1, \ldots)$, où le premier 1 est sur la n-ième entrée de f_n. On a donc $f_n = \sum_{k\geq n} e_k$. Son nom lui vient de la propriété suivante : pour toute suite $(a_n)_n \in c_{00}$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f_n = \sum_{\substack{n,k\in\mathbb{Z}\\ k\geq n}} a_n e_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_k \Big(\sum_{n=-\infty}^{k} a_n \Big).$$

Ainsi, pour $(a_n)_n \in c_{00}$, les coordonnées de $\sum_n a_n f_n$ dans la "base canonique" sont les sommes partielles $(A^k_{-\infty})_k$, définies pour $k \in \mathbb{Z}$ par $A^k_{-\infty} = \sum_{n=-\infty}^{k} a_n$.

En particulier, les implications $(i) \Rightarrow (v)$ des théorèmes de Gurariy-Macaev se reformulent de la manière suivante :

Corollaire 1.28. *Soit $p \in [1, +\infty]$ et $\Lambda = (\lambda_n)_n \subset (-\frac{1}{p}, +\infty)$ telle que la suite $(\lambda_n + \frac{1}{p})_n$ est lacunaire. Alors il existe deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$ telles que l'on a*

$$C_1 \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|b_n|^p}{p\lambda_n + 1} \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big\| \sum_n b_n t^{\lambda_n} \Big\|_p \leq C_2 \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|b_n|^p}{p\lambda_n + 1} \Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \textit{si } p \in [1, +\infty),$$

ou bien :

$$C_1 \sup_{N\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{n=-\infty}^{N} b_n \Big| \leq \Big\| \sum_n b_n t^{\lambda_n} \Big\|_\infty \leq C_2 \sup_{N\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{n=-\infty}^{N} b_n \Big|, \qquad \textit{si } p = +\infty,$$

pour toute suite $b = (b_n)_n \in c_{00}$.

Démonstration. Si p est fini, d'après le Théorème 1.25, il existe un isomorphisme $S_p : \ell^p \to M_\Lambda^p$ satisfaisant $S_p(e_n) = (p\lambda_n + 1)^{\frac{1}{p}} t^{\lambda_n}$, où $(e_n)_n$ est la base canonique de ℓ^p. Ainsi, pour tout polynôme de Müntz $f(t) = \sum_n b_n t^{\lambda_n} \in M(\Lambda)$, on a $f = S_p(a)$, où $a = (a_n)_n$ est la suite dans c_0 donnée par $a_n = b_n(p\lambda_n + 1)^{-\frac{1}{p}}$, pour tout entier n. On obtient donc :

$$\frac{1}{\|S_p^{-1}\|}\|a\|_{\ell^p} \leq \|f\|_p \leq \|S_p\|.\|a\|_{\ell^p},$$

et le résultat suit d'après la définition de a.

Si $p = +\infty$, d'après le Théorème 1.26, il existe un isomorphisme $S_\infty : c \to M_\Lambda^\infty$ satisfaisant $S_\infty(f_n) = t^{\lambda_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout polynôme de Müntz $f(t) = \sum_n b_n t^{\lambda_n} \in M(\Lambda)$, on a $f = S_\infty(\sum_n b_n f_n)$, on obtient donc :

$$\frac{1}{\|S_\infty^{-1}\|}\Big\|\sum_n b_n f_n\Big\|_{\ell^\infty} \leq \|f\|_\infty \leq \|S_\infty\|.\Big\|\sum_n b_n f_n\Big\|_{\ell^\infty},$$

et le résultat suit d'après la Remarque 1.27. $\square$

Le résultat suivant généralise le théorème de Clarkson-Erdös dans les espaces de Müntz lacunaires, sans la gap-condition.

Théorème 1.29. *Soient $p \in [1, +\infty)$ et $\Lambda = (\lambda_n)_n$ une suite telle que $(\lambda_n + 1/p)_{n\in\mathbb{Z}}$ est lacunaire. Alors pour toute fonction $f \in M_\Lambda^p$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que la série entière suivante :*

$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^{\lambda_n},$$

converge uniformément sur tout compact de $(0,1)$, et elle satisfait $\widetilde{f} \in L^p$ et $f = \widetilde{f}$ presque partout sur $[0,1]$.

Démonstration. Pour commencer nous montrons une inégalité sur coefficients des polynômes de Müntz. C'est un raffinement de l'inégalité (1.2) dans le cas lacunaire. D'après le Théorème de Gurariy-Macaev 1.25 il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|b_n|^p}{p\lambda_n + 1}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C_2\|g\|_p,$$

pour tout polynôme $g \in M(\Lambda)$ de la forme $g(t) = \sum_n b_n t^{\lambda_n}$. De là on obtient aisément l'estimation suivante pour de tels polynômes g :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |b_n| \leq (p\lambda_n + 1)^{\frac{1}{p}} C_2\|g\|_p. \tag{1.6}$$

Soit $f \in M_\Lambda^p$, alors par définition il existe une suite de polynômes $(f^{(k)})_k \in M(\Lambda)$ qui converge vers f dans L^p quand $k \to +\infty$. Soit $(a_n^{(k)})_{n,k}$ la suite des coefficients des polynômes $f^{(k)}$, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in (0,1), \quad f^{(k)}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{(k)} t^{\lambda_n}.$$

Pour un $n \in \mathbb{Z}$ fixé et $k, k' \in \mathbb{N}$, d'après (1.6) on obtient :

$$|a_n^{(k)} - a_n^{(k')}| \leq \frac{(p\lambda_n + 1)^{\frac{1}{p}}}{\delta}\|f^{(k)} - f^{(k')}\|_p.$$

Comme $f^{(k)}$ est une suite de Cauchy dans L^p, alors $(a_n^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy, donc elle converge vers un nombre qu'on note $a_n^*(f) \in \mathbb{C}$ quand $k \to +\infty$. Par passage à la limite, $a_n^*(f)$ satisfait les estimations suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad |a_n^{(k)} - a_n^*(f)| \leq (p\lambda_n + 1)^{\frac{1}{p}} C_2\|f^{(k)} - f\|_p,$$

et
$$|a_n^*(f)| \leq (p\lambda_n + 1)^{\frac{1}{p}} C_2 \|f\|_p.$$
De plus, d'après ces inégalités la quantité $a_n^*(f)$ ne dépend pas de la suite de polynômes $(f^{(k)})_k$ considérée. En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la forme linéaire $a_n^* : M(\Lambda) \to \mathbb{C}$ définie par $a_n^*(g) = b_n$ pour $g(t) = \sum b_k t^{\lambda_k} \in M(\Lambda)$, se prolonge en une forme linéaire continue sur M_Λ^p et sa norme est inférieure à $C_2(p\lambda_n + 1)^{1/p}$. Nous allons démontrer que la série entière suivante :
$$\widetilde{f}(t) = \sum_n a_n^*(f) t^{\lambda_n}$$
converge uniformément sur tout compact de $(0, 1)$. Plus précisément, nous allons démontrer que pour toute suite $f^{(k)}$ de polynômes de Müntz qui converge vers f dans L^p, pour tout $K \subset (0, 1)$ compact, il existe une constante C_K satisfaisant :
$$\|f^{(k)} - \widetilde{f}\|_K \leq C_K \|f^{(k)} - f\|_p.$$
En admettant cela, on obtient alors l'existence d'une suite $(f^{(k)})_k$ telle que $f^{(k)} \to \widetilde{f}$ uniformément sur tout compact et $f^{(k)} \to f$ dans L^p quand $k \to +\infty$. Comme il existe une sous-suite de $f^{(k)}$ qui converge presque partout vers f, on obtient alors $f = \widetilde{f}$ presque partout sur $(0, 1)$. Fixons maintenant un compact $K \subset (0, 1)$ et $\delta > 0$ tel que $K \subset [\delta, 1 - \delta]$. Quitte à décaler les termes de la suite $(\lambda_n)_n$ on peut supposer que $\lambda_n \geq 0$ si $n \geq 0$ et $\lambda_n < 0$ si $n < 0$. Pour $k, k' \in \mathbb{N}$ et $t \in K$, on a
$$\begin{aligned}
|f^{(k)}(t) - \widetilde{f}(t)| &= \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(a_n^{(k)} - a_n^*(f)\big) t^{\lambda_n} \Big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}^{(k)} - a_{-n}^*(f)| t^{\lambda_{-n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n^{(k)} - a_n^*(f)| t^{\lambda_n} \\
&\leq C_2 \|f^{(k)} - f\|_p \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (p\lambda_{-n} + 1)^{\frac{1}{p}} \delta^{-1/p} + \sum_{n=0}^{+\infty} (p\lambda_n + 1)^{\frac{1}{p}} (1 - \delta)^{\lambda_n} \Big).
\end{aligned}$$
Les deux séries ci-dessus convergent : pour celle de droite, on n'a pas besoin de l'hypothèse de lacunarité, comme $(1 - \delta) < 1$ et $\limsup_{n\to+\infty} \big(p\lambda_n + 1\big)^{\frac{1}{p\lambda_n}} \leq 1$, le critère d'Hadamard permet de conclure, comme dans la preuve du théorème de Clarkson-Erdös. La série de gauche converge car d'après la lacunarité de $(\lambda_n + 1/p)_n$ il existe $r > 1$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (p\lambda_{-n} + 1)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(p\lambda_0 + 1)^{\frac{1}{p}}}{r^{n/p}}.$$
On obtient donc la constante C_K voulue et la preuve est terminée. □

T. Erdelyi a démontré dans [23] que si Λ satisfait la condition de Müntz donnée par un des Théorème 1.8 (mais pas la gap-condition), alors toute fonction $f \in M_\Lambda^\infty$ peut être représentée comme une fonction analytique sur $\mathbb{D} \setminus (-1, 0]$, restreinte sur l'intervalle $(0, 1)$. On peut probablement en déduire comme L. Schwartz, qu'elle se prolonge sur la surface de Riemann du logarithme défini par $|z| < 1$. Dans le cas lacunaire et p fini, nous avons pu être plus précis car nous donnons une forme explicite de la fonction qui permet de prolonger f. Le cas $p = +\infty$ reste à traiter.

Conjecture 1. Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite lacunaire. Alors pour toute fonction $f \in M_\Lambda^\infty$, il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{C}$ telle que la série entière suivante :
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^{\lambda_n},$$
converge uniformément sur tout compact de $(0, 1)$ vers f.

Le lemme suivant va nous servir plusieurs fois pour estimer des séries entières d'une forme très particulière.

Lemme 1.30. *Soit $\alpha > 0$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante qui satisfait le critère de Müntz et la gap-condition.*

1) Si Λ est sous-géométrique, il existe $C_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [0,1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} \geq C_1 \Big(\frac{1}{1-t}\Big)^\alpha.$$

2) Si Λ est quasi-lacunaire, alors il existe $C_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [0,1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} \leq C_2 \Big(\frac{1}{1-t}\Big)^\alpha.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que Λ est à la fois lacunaire et sous-géométrique. On note r l'indice de lacunarité de Λ, et il existe alors une constante $d = (r-1)^{-1}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, \lambda_n \leq d(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$. De plus il existe une constante $M > 1$ telle que $\lambda_{n+1} \leq M\lambda_n$ et on obtient donc :

$$\lambda_n \leq d(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \leq d\lambda_{n+1} \leq dM\lambda_n.$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_n \leq m < \lambda_{n+1}$, on a

$$\lambda_n^\alpha \approx \big(\lambda_{n+1} - \lambda_n\big)^\alpha \approx \lambda_{n+1}^\alpha \approx m^\alpha,$$

où les constantes sous-jacentes ne dépendent que de Λ et α. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} &\approx \sum_{n\geq 0} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^\alpha t^{\lambda_n} \\
&\approx \sum_{n\geq 0} \sum_{\lambda_n \leq m < \lambda_{n+1}} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{\alpha-1} t^{\lambda_n} \\
&\approx \sum_{n\geq 0} \sum_{\lambda_n \leq m < \lambda_{n+1}} m^{\alpha-1} t^{\lambda_n},
\end{aligned}$$

De plus comme $t^{\lambda_n} \leq t^{m/M}$, on obtient pour tout $t \in [0,1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} &\lesssim \sum_{m\geq 0} m^{\alpha-1} t^{\frac{m}{M}} \\
&\underset{t\to 1}{\sim} \Big(\frac{1}{1-t^{\frac{1}{M}}}\Big)^\alpha \\
&\lesssim \Big(\frac{1}{1-t}\Big)^\alpha.
\end{aligned}$$

Pour montrer l'autre inégalité, comme $t^{\lambda_n} \geq t^m$, on obtient pour tout $t \in [0,1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} &\gtrsim \sum_{m\geq \lambda_0} m^{\alpha-1} t^m \\
&\underset{t\to 1}{\sim} \Big(\frac{1}{1-t} - \sum_{m=0}^{[\lambda_0]} m^{\alpha-1} t^m\Big)^\alpha \\
&\gtrsim \Big(\frac{1}{1-t}\Big)^\alpha.
\end{aligned}$$

Dans le cas où Λ est lacunaire et sous-géométrique, on obtient bien le résultat. Supposons maintenant que Λ est juste quasi-lacunaire. Alors d'après la Proposition 1.22, Λ est une union finie d'ensembles lacunaires $(\Lambda_j)_{j=1}^K$. De plus, on peut ajouter des termes dans chaque Λ_j pour obtenir des ensembles $\Lambda_j' \supset \Lambda_j$ tels que Λ_j' est lacunaire et sous-géométrique pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$. On pourra voir la preuve de [31, Th. 9.3.3] pour plus de détails. On a donc pour tout $t \in [0, 1)$, :

$$\sum_{n\geq 0} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} \leq \sum_{j=1}^K \sum_{\lambda \in \Lambda_j'} \lambda^\alpha t^\lambda \lesssim K \Big(\frac{1}{1-t}\Big)^\alpha.$$

Si Λ est juste sous-géométrique, alors il existe une sous-suite $\Lambda' \subset \Lambda$ sous-géométrique et lacunaire, et d'après la première partie on a pour tout $t \in [0, 1)$:

$$\sum_{n\geq 0} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} \geq \sum_{n\geq 0} \lambda_n'^\alpha t^{\lambda_n} \gtrsim \Big(\frac{1}{1-t}\Big)^\alpha.$$

□

Nous présentons maintenant une application du théorème de Gurariy-Macaev dans L^2.

Exemple 1.31. *Un espace de Müntz M_Λ^2 inclus dans un espace de Bergman.*
L'espace de Bergman A^2 (voir [22]) est le complété des polynômes pour la norme suivante :

$$\|f\|_{A^2} = \Big(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mathcal{A}(z)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

où $\mathcal{A}$ est la mesure d'aire normalisée du disque. C'est l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ qui appartiennent à $L^2(\mathbb{D})$. Dans A^2, les fonctions $(z^m)_{m\in\mathbb{N}}$ forment un système orthogonal. Supposons que $\Lambda \subset \mathbb{N}$ et Λ est lacunaire. Alors la suite $(\lambda_n + 1/2)_n$ est lacunaire et d'après le théorème de Gurariy Macaev, les fonctions $(h_n)_n \in M_\Lambda^2$ définies par $h_n(t) = (2\lambda_n)^{1/2} t^{\lambda_n}$ forment une base de Riesz de M_Λ^2, c'est à dire une suite équivalente à la base canonique de ℓ^2. D'autre part, comme $\Lambda \subset \mathbb{N}$, les fonctions $t \mapsto t^{\lambda_n}$ se prolongent de façon holomorphe et unique sur $\mathbb{D}$, donc on peut voir les fonctions $(h_n)_n$ comme des éléments de A^2. On a alors :

$$\begin{aligned}\|h_n\|_{A^2} &= (2\lambda_n)^{1/2}\Big(\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^{2\lambda_n} r dr \frac{d\theta}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_n+1}\Big)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(h_n)_n \in A^2$ est équivalente à la base canonique de ℓ^2, et donc l'inclusion formelle $J : M_\Lambda^2 \to A^2$ est bornée et c'est un isomorphisme sur son image. En d'autres termes, l'espace M_Λ^2 s'identifie d'une façon canonique au sous-espace de A^2 engendré par les monômes z^{λ_n}.

1.2 Opérateurs compacts

Dans toute cette partie, on notera X, Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné entre X et Y. Il existe de nombreuses classes d'opérateurs dans la littérature. Elles peuvent permettre d'étudier des propriétés plus fines que la bornitude. Celles que nous allons présenter dans la suite sont stables par composition à gauche ou à droite par un opérateur borné, on dit donc que ce sont des idéaux d'opérateurs.

1.2.1 Différents idéaux d'opérateurs

Nous commençons par définir les idéaux d'opérateurs les plus classiques.

Définition 1.32. On dit que T est *compact* si l'image de la boule unité $T(B_X)$ est relativement compacte dans Y. On note parfois $\mathcal{K}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs compacts sur X à valeurs dans Y. La *norme essentielle* de T, notée $\|T\|_e$ est définie par :

$$\|T\|_e = \inf \Big\{ \|T - K\|, \quad K : X \to Y, \quad K \text{ compact} \Big\}.$$

La norme essentielle est la distance entre T et $\mathcal{K}(X, Y)$. On dit que T est *faiblement compact* si $T(B_X)$ est faiblement compacte dans Y. La *norme essentielle faible* de T, notée $\|T\|_{e,w}$, est définie par :

$$\|T\|_{e,w} = \inf \Big\{ \|T - K\|, \quad K : X \to Y, \quad K \text{ faiblement compact} \Big\}.$$

C'est la distance entre T et les opérateurs faiblement compacts. Elle a été par exemple considérée dans [6, 7, 36]. Ces indicateurs permettent de mesurer le défaut de compacité ou de compacité faible.

Remarque 1.33. La compacité, la bornitude et la compacité faible se comparent :

1) Si T est compact, alors il est faiblement compact. De plus on a
$$\|T\|_{e,w} \leq \|T\|_e \leq \|T\|.$$
2) Si Y est réflexif, alors tout opérateur $T : X \to Y$ est faiblement compact. C'est une conséquence directe du théorème d'Alaoglu-Bourbaki et de la définition de la réflexivité (voir [37]). Nous nous intéresserons donc à la norme essentielle faible uniquement pour des opérateurs à valeurs dans un espace non réflexif, par exemple des espaces $L^1(\mu), L^\infty(\mu)$ ou $\mathcal{C}(K)$.

Définition 1.34. On dit que $T : X \to Y$ est *nucléaire* si il existe une suite $(R_n)_n$ d'opérateurs de rang 1 satisfaisant :

(a) pour tout $x \in X$, la série $\sum_n R_n(x)$ converge vers $T(x)$ dans Y ;

(b) $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \|R_n\| < +\infty$.

On notera $\sum_n R_n = T$ si l'identité (a) est satisfaite, c'est à dire que la série $\sum_n R_n$ converge vers T au sens de la topologie forte des opérateurs. La condition (b) entraîne en particulier que la série $\sum_n R_n$ converge dans $\mathcal{B}(X, Y)$. La *norme nucléaire* de S est définie par

$$\|T\|_{\mathcal{N}} = \inf \Big\{ \sum_n \|R_n\|, \quad \text{rang}(R_n) = 1, \sum_{n \in \mathbb{N}} R_n = T \Big\}.$$

Tout opérateur $R : X \to Y$ de rang 1 peut se représenter sous la forme d'un *produit tensoriel* : pour $y \in Y$ et $f^* \in X^*$ (voir [17]) on note $R = (y \otimes f^*)$ l'opérateur défini par

$$\forall x \in X, \quad R(x) = f^*(x)y.$$

Les opérateurs nucléaires sont les opérateurs les plus simples à construire entre deux espaces X, Y quelconques.

Définition 1.35. On dit que T est *approximable* si c'est une limite d'opérateurs de rang fini, pour la topologie de la norme dans $\mathcal{B}(X,Y)$: il existe S_n une suite d'opérateurs de rang fini telle que $\|T - S_n\| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $a_n(T) \in \mathbb{R}_+$ comme le *n-ième nombre d'approximation* de T par :

$$a_n(T) = \inf \Big\{ \|T - R\|, \quad R : X \to Y, \quad \text{rang}(R) < n \Big\}.$$

On obtient immédiatement : T est approximable si et seulement si $a_n(T) \to 0$ quand $n \to +\infty$, et dans ce cas, T est compact. Il existe beaucoup d'espaces dans lesquels les opérateurs approximables sont exactement les opérateurs compacts, mais ce n'est pas vrai en toute généralité. De plus, on a aussi de manière immédiate :

$$\|T\| = a_1(T) \geq a_2(T) \geq \cdots \geq \lim_{n \to +\infty} a_n(T) \geq \|T\|_e.$$

Les nombres d'approximation $(a_n(T))_n$ font partie de la classe des s-nombres, qui comprend par exemple les nombres de Gelfand, de Bernstein, de Kolmogorov, d'entropie.

Exemple 1.36. *Une classe d'opérateurs presque compacts.*

Soit $T : X \to Y$ un opérateur. Les *nombres de Bernstein* $(b_n(T))_n$ sont définis par :

$$b_n(T) = \sup_{\substack{E \subset X \\ dim(E) = n}} \inf_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|T(x)\|.$$

La suite $(b_n(T))_n$ est décroissante, et elle satisfait $b_n(T) \leq a_n(T)$ pour tout $n \geq 1$. On dit que T est un *opérateur finiment strictement singulier* si $b_n(T) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On dit aussi que T est *super-strictement singulier*. Un tel opérateur n'est un isomorphisme sur son image sur aucun sous-espace de dimension infinie.

Tout opérateur compact est finiment strictement singulier, mais la réciproque est fausse en général, il y a au moins deux contre-exemples célèbres. Le premier exemple, est l'opérateur de Volterra considéré entre L^1 et L^∞. Ainsi l'opérateur $V_{1,\infty} : L^1 \to L^\infty$ défini par $V_{1,\infty}(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ est finiment strictement singulier [35] mais il n'est pas compact. Il en est de même pour l'opérateur d'inclusion $J_{p,q} : \ell^p \subset \ell^q$ avec $p < q$: il n'est pas compact mais il est finiment strictement singulier [39].

Nous n'étudierons pas d'autres classes de s-nombres dans ce mémoire, mais on pourra se référer à [15] pour plus de détails. Nous présentons une dernière classe d'opérateurs qui contient les opérateurs compacts.

Définition 1.37. Un opérateur $T : X \to Y$ est un *opérateur de Dunford-Pettis* si pour toute suite $(x_n)_n$ faiblement convergente dans X, la suite $(T(x_n))_n$ est fortement convergente dans Y. Il existe aussi la terminologie *T est complètement continu* pour désigner un tel opérateur.

Il est clair que tout opérateur compact est un opérateur de Dunford-Pettis car si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x et T est compact, alors pour toute extraction $(x_{n_k})_k$, le vecteur $T(x)$ est l'unique valeur d'adhérence de $(T(x_{n_k}))_k$, et par compacité c'est sa limite.

Exemple 1.38. *Dans des espaces de Müntz M_Λ^1 et M_Λ^∞.*

1) Soit M_Λ^1 un sous-espace de Müntz de L^1. Alors tout opérateur borné $T : M_\Lambda^1 \to Y$ est un opérateur de Dunford-Pettis. En effet, l'espace M_Λ^1 est isomorphe à un sous-espace de ℓ^1 [52, Rem. 4] et ainsi il hérite de la propriété de Schur de ℓ^1, c'est à dire que pour toute suite bornée $(x_n)_n \in M_\Lambda^1$ faiblement convergente, $(x_n)_n$ est fortement convergente. Par continuité, $T(x_n)$ converge fortement et donc T est un opérateur de Dunford-Pettis.
2) De même, soit M_Λ^∞ un sous-espace de Müntz de $\mathcal{C}$. Alors tout opérateur borné $S : X \to M_\Lambda^\infty$ est un opérateur de Dunford-Pettis. En effet, M_Λ^∞ est isomorphe à un sous-espace de c [52, Th. 1], donc l'espace dual $\left(M_\Lambda^\infty\right)^*$ a la propriété de Schur. Ainsi, l'opérateur adjoint S^* est un opérateur de Dunford-Pettis et donc S aussi.

Définition 1.39. [53, p.237] Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $q > 0$. La *classe de Schatten* $\mathcal{S}^q(H_1, H_2)$, est définie par :

$$\mathcal{S}^q(H_1, H_2) = \Big\{ T \in \mathcal{B}(H_1, H_2), \quad \big(a_n(T)\big)_n \in \ell^q \Big\}.$$

Parfois nous noterons seulement $\mathcal{S}^q$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur les espaces de Hilbert en question. Les opérateurs de la classe $\mathcal{S}^q$ sont toujours compacts. Pour $q > 0$ et un opérateur $T : H_1 \to H_2$, on définit la *norme de Schatten* par :

$$\|T\|_{\mathcal{S}^q} = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(T)^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

La norme de Schatten est une norme sur $\mathcal{S}^q$ si $q \geq 1$. Pour mieux comprendre cette classe, nous présentons une manière équivalente de la construire. Dans les espaces de Hilbert, tout opérateur compact $T : H_1 \to H_2$ se représente avec la décomposition de Schmidt suivante :

$$\forall x \in H_1, \quad T(x) = \sum_{n \geq 0} s_n(T) \langle x, e_n \rangle f_n,$$

où $(e_n)_n$ est un système orthonormé de H_1, $(f_n)_n$ est un système orthonormé de H_2, et $(s_n(T))_n \in \mathbb{R}_+$ est une suite décroissante. Les termes de la suite $(s_n(T))_n$ sont appelées les *valeurs singulières de* T. Ce sont les racines des valeurs propres de $T^*T : H_1 \to H_1$, ordonnées de manière décroissante. Alors on a

$$\forall n \geq 1, \quad s_{n-1}(T) = a_n(T).$$

La classe de Schatten $\mathcal{S}^2$ est appelée l'ensemble des *opérateurs de Hilbert-Schmidt*. La classe de Schatten $\mathcal{S}^1$ est exactement l'espace des opérateurs nucléaires entre H_1 et H_2.

Le théorème suivant permet d'estimer la norme de Schatten dans certains cas.

Théorème 1.40. [21, Th. 4.7 p.82] *Soient $T : H_1 \to H_2$ un opérateur, $(f_n)_n$ une base orthonormée de H_1, et $q \in (0, +\infty)$.*

1) Si $q \leq 2$ on a

$$\|T\|_{\mathcal{S}^q} \leq \Big(\sum_{n \geq 0} \|T(f_n)\|^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

2) Si $q \geq 2$, on a

$$\|T\|_{\mathcal{S}^q} \geq \Big(\sum_{n \geq 0} \|T(f_n)\|^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

En particulier si $q = 2$, on obtient l'expression suivante de la norme de Hilbert-Schmidt

$$\|T\|_{\mathcal{S}^2} = \Big(\sum_{n \geq 0} \|T(f_n)\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

et cette quantité ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

Pour $S, T \in \mathcal{S}^2$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H_1, l'expression suivante :

$$\langle T, S \rangle = \mathrm{Tr}(S^*T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle S^*T f_n, f_n \rangle,$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}^2$: on peut montrer que cette somme est toujours finie, qu'elle ne dépend pas de la base orthonormée choisie, et que $(\mathcal{S}^2, \langle\ .\ \rangle)$ est un espace de Hilbert. Pour plus de détails on pourra se référer à [21, 45, 53]. Par ailleurs, il existe un équivalent des classes de Schatten dans les espaces de Banach séparables, ce sont les opérateurs q-sommables (à ne pas confondre avec les opérateurs q-sommants), satisfaisant $(a_n(T))_n \in \ell^q$, mais ce n'est pas une classe très étudiée (voir [30, 47]).

Définition 1.41. Soient $p \in [1, +\infty)$, X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré et $T : X \to L^p(\mu)$ un opérateur. On dit que T est *borné pour l'ordre* si il existe une fonction $g \in L^p(\mu)$ telle que :

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |T(x)(\omega)| \leq g(\omega),$$

pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$. Dans le cas où X est séparable, les opérateurs bornés pour l'ordre sont les opérateurs tels que la fonction $t \mapsto \sup_{x \in D} |T(x)(\omega)|$ est dans $L^p(\mu)$ pour toute partie D dénombrable et dense dans B_X.

On peut aussi définir les opérateurs bornés pour l'ordre pour des "Banach lattices", ce sont des espaces de Banach munis d'une relation d'ordre, qui généralisent les espaces $L^p(\mu)$.

Remarque 1.42. Soient H un espace de Hilbert séparable, (Ω, μ) un espace mesuré et $T : H \to L^2(\mu)$. Alors T est borné pour l'ordre si et seulement si c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt. En effet, soit D une partie dénombrable dense de B_H, D_2 une partie dénombrable dense de B_{ℓ^2} et $(e_n)_n$ une base orthonormée de H. On a

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathcal{S}^2}^2 &= \sum_{n \geq 0} \|T(e_n)\|_{L^2(\mu)}^2 \\
&= \int_\Omega \sum_{n \geq 0} \big|T(e_n)(\omega)\big|^2 d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \sup_{a \in D_2} \Big| \sum_{n \geq 0} a_n T(e_n)(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \sup_{h \in D} |T(h)(\omega)|^2 d\mu(\omega).
\end{aligned}$$

1.2.2 Estimations inférieures pour la norme essentielle

Dans la suite de cette section, nous démontrons des résultats généraux pour minorer ou calculer la norme essentielle des opérateurs. Tous les résultats ont été obtenus en collaboration avec I. Al Alam, G. Habib, P. Lefèvre, F. Maalouf et ils apparaissent dans [6].

Définition 1.43. On dit qu'une suite $\big(\widetilde{x}_m\big)_{m \in \mathbb{N}}$ est une *bloc-sous-suite* de $\big(x_n\big)_n$ si il existe une suite $(I_m)_m$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ avec $\max I_m < \min I_{m+1}$, et une suite $(c_i)_i \in [0, 1]$ tels que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{x}_m = \sum_{j \in I_m} c_j x_j \quad \text{et} \quad \sum_{j \in I_m} c_j = 1.$$

Les bloc-sous-suites ont la propriété suivante : pour toute suite $(y_n)_n \in Y$ faiblement convergente, il existe une bloc-sous-suite $(\widetilde{y}_m)_m$ fortement convergente dans Y. Cette propriété est utilisée dans la preuve du lemme suivant.

Lemme 1.44. [7, Lemme 3.1] *Soient $T : X \to Y$ un opérateur borné, $\big(x_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite normalisée dans X et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.*

1) Supposons que pour toute sous-suite $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour tout $g \in Y$, l'opérateur T satisfait : $\limsup_{n \to +\infty} \big\|T\big(x_{\varphi(n)}\big) - g\big\| \geq \alpha$. Alors $||T||_e \geq \alpha$.

2) Supposons que pour toute bloc-sous-suite $\big(\widetilde{x}_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $g \in Y$, l'opérateur T satisfait : $\limsup_{n \to +\infty} \big\|T\big(\widetilde{x}_n\big) - g\big\| \geq \alpha$. Alors $||T||_{e,w} \geq \alpha$.

Démonstration. Nous démontrons uniquement le point 2) car le point 1) est similaire et plus facile. Soit S un opérateur faiblement compact, alors il existe une sous-suite de $(S(x_n))_n$ qui converge faiblement vers un élément $g \in Y$. D'après le théorème de Mazur, il existe donc une bloc-sous-suite $\big(\widetilde{S(x_m)}\big)_m$ qui converge fortement vers g. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\widetilde{x}_m \in B_X$, et on obtient alors :

$$\begin{aligned}\|T - S\| &\geq \limsup_{m\to+\infty} \|(T - S)(\widetilde{x}_m)\| \\ &\geq \limsup_{m\to+\infty} \|T(\widetilde{x}_m) - g\| \\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat en considérant la borne inférieure parmi les opérateurs faiblement compacts S. $\square$

Le résultat qui suit donne des bornes inférieures de la norme essentielle et de la norme essentielle faible très intuitives, en termes de suites α-séparées.

Lemme 1.45. *Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linaire et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.*

1) Si l'image de la boule unité $T(B_X)$ contient une suite α-séparée $(y_n)_n$ (c'est à dire pour tout $n \neq m$, $\|y_n - y_m\| \geq \alpha$) alors

$$\|T\|_e \geq \frac{\alpha}{2}.$$

2) Si l'image de la boule unité $T(B_X)$ contient une suite $(y_n)_n$ telle que toute bloc-sous-suite $(\widetilde{y}_m)_m$ est α-séparée, alors $\|T\|_{e,w} \geq \dfrac{\alpha}{2}$.

Démonstration. On démontre seulement 2) car 1) est similaire et plus facile. Soit $(x_n)_n \in B_X$ et $(y_n)_n = (T(x_n))_n$, tel que toute bloc-sous-suite $(\widetilde{y}_m)_m$ de $(y_n)_n$ est α-séparée dans Y. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m \in \mathbb{N}$, pour tout $g \in Y$, on a

$$\alpha \leq \|\widetilde{y}_n - \widetilde{y}_m\| \leq \|\widetilde{y}_n - g\| + \|\widetilde{y}_m - g\|.$$

Ainsi, il existe au plus un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\widetilde{y}_n - g\| < \frac{\alpha}{2}$, d'où on obtient

$$\limsup_{m\to\infty} ||T(\widetilde{x}_m) - g|| \geq \frac{\alpha}{2},$$

pour toute bloc-sous-suite $(\widetilde{x}_m)_m$. D'après le Lemme 1.44. 2), on obtient le résultat. $\square$

Nous présentons une application du Lemme 1.45 qui montre que cette borne inférieure peut-être précise dans certains cas.

Exemple 1.46. Soit $v : \ell^1 \longrightarrow c$ l'opérateur de Volterra discret défini par

$$v(x) = \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k\Big)_n$$

pour $x = (x_k)_k \in \ell^1$. On a $\|v\|_e = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration. On note $(e_n)_n$ la base canonique de ℓ^1, et pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n := v(e_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite f_n est donnée par : $f_n = (f_{n,k})_k \in v(B_{\ell^1})$, où $f_{n,k} = 0$ si $k < n$ et $f_{n,k} = 1$ si $k \geq n$: c'est la base sommante de c. Comme $(f_n)_n$ est 1-séparée dans c, le Lemme 1.45 donne la minoration.

Pour montrer la borne supérieure, on considère l'opérateur $K : \ell^1 \to c$ de rang 1, défini par $K = \frac{1}{2}\mathbb{1} \otimes \mathrm{Tr}$, où $\mathbb{1}$ est la suite constante égale à 1 et $\mathrm{Tr} \in (\ell^1)^*$ est la forme linéaire trace définie par $\mathrm{Tr}(x) = \sum_{n\geq 0} x_n$. Pour tout $x \in \ell^1$ on a

$$\|(v-K)(x)\|_c = \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k}{2}\right| = \frac{1}{2}\sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k\right| \leq \frac{\|x\|_{\ell^1}}{2}.$$

Comme K est compact, on a

$$\|v\|_e \leq \|v-K\| \leq \frac{1}{2}.$$

Comme K est de rang 1, on obtient aussi $a_n(v) = \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geq 2$. □

Définition 1.47. Soit X un espace de Banach. On dit que $P : X \to \mathbb{R}_+$ est une *sous-norme* sur X si P satisfait :

(a) $\forall x, y \in X,\ P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ (inégalité triangulaire) ;

(b) $\forall x \in X,\ P(x) \leq ||x||$.

Lemme 1.48. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-normes sur Y. Supposons que :*

(a) Pour tout $g \in Y$, $\inf_{k\in\mathbb{N}} P_k(g) = 0$.

(b) Il existe une suite $(h_n)_n \in B_X$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \liminf_{n\to+\infty} P_k(T(h_n)) \geq \alpha.$$

Alors $||T||_e \geq \alpha$.

Démonstration. Soit $S : X \longrightarrow Y$ un opérateur compact, et $\varepsilon > 0$. Il existe une extraction $(n_j)_j$ dans $\mathbb{N}$ telle que $S(h_{n_j}) \to g \in Y$. Comme $\inf_{k\in\mathbb{N}} P_k(g) = 0$, on pose $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P_{k_0}(g) \leq \varepsilon$. Soit $j_0 \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait simultanément $\|S(h_{n_j}) - g\| \leq \varepsilon$ et $P_{k_0}(T(h_{n_j})) \geq \alpha - \varepsilon$ pour tout $j \geq j_0$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\|T-S\| &\geq \|T(h_{n_j}) - S(h_{n_j})\| \\
&\geq \|T(h_{n_j}) - g\| - \|S(h_{n_j}) - g\| \\
&\geq P_{k_0}(T(h_{n_j}) - g) - \|S(h_{n_j}) - g\| \\
&\geq P_{k_0}(T(h_{n_j})) - P_{k_0}(g) - \varepsilon \\
&\geq \alpha - 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme cette inégalité marche pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient bien $\|T\|_e \geq \alpha$ en prenant la borne inférieure parmi les opérateurs compacts S. □

Le résultat suivant donne une vision plus intuitive de la norme essentielle dans le cas où Y est un espace $L^p(\mu)$, et de la norme essentielle faible lorsque $p = 1$ et μ est finie.

Théorème 1.49. *Soient (Ω, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty)$ et $T : X \to L^p(\Omega, \mu)$ un opérateur linéaire. Supposons qu'il existe une suite décroissante $(A_k)_k$ de sous-ensembles de Ω tels que une suite $(h_n)_n$ dans B_X, et un nombre $\alpha > 0$ tels que :*

(a) Les ensembles (A_k) satisfont $\mu\big(\bigcap_k A_k\big) = 0$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\limsup_{n\to+\infty} \Big(\int_{A_k} |T(h_n)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \geq \alpha$.

Alors on a

$$||T||_e \geq \alpha.$$

De plus, si $p = 1$ et $\mu(\Omega) < +\infty$, alors on a

$$\|T\|_e \geq \|T\|_{e,w} \geq \alpha.$$

Démonstration. On définit les sous-normes $P_k : L^p(\Omega, \mu) \to \mathbb{R}_+$ par

$$P_k(f) := ||f||_{L^p(A_k,\mu)}.$$

Pour tout $g \in L^p(\mu)$, la suite $(P_k(g))_k$ est décroissante et tend vers 0 d'après le théorème de convergence monotone. Nous allons appliquer le Lemme 1.48 pour une suite $(h'_n)_n$ bien choisie. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe une extraction $(h_{\varphi_k(n)})_n$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} P_k(T(h_{\varphi_k(n)})) = \limsup_{n\to+\infty} P_k(T(h_n)) \geq \alpha.$$

De plus, quitte à extraire encore, on peut supposer que $P_k(T(h_{\varphi_k(k)})) \geq \alpha - \frac{1}{k}\cdot$ Fixons la suite $h'_n = h_{\varphi_n(n)}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq k$, on a

$$P_k(T(h'_n)) \geq P_n(T(h_{\varphi_n(n)})) \geq \alpha - \frac{1}{n}\cdot$$

Ainsi pour tout k fixé, on a $\liminf_{n\to+\infty} P_k(T(h'_n)) \geq \alpha$ et le Lemme 1.48 entraîne

$$\|T\|_e \geq \alpha.$$

Supposons désormais que $p = 1$ et $\mu(\Omega) < +\infty$. Alors on a $\mu(A_k) \to 0$ quand $k \to +\infty$. Soit $S : X \to L^1(\Omega, \mu)$ un opérateur faiblement compact. Comme l'ensemble $H = \{S(h_n), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement faiblement compact dans $L^1(\mu)$, H est uniformément intégrable [53, p.137], ce qui signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\mu(B) \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \int_B |S(h_n)| d\mu \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe k tel que $\mu(A_k) < \delta_\varepsilon$. De plus par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\int_{A_k} \left|T(h_n)\right|^p d\mu \geq \alpha - \varepsilon$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\|T - S\| &\geq \|(T - S)(h_n)\|_{L^1(\mu)} \\
&\geq \int_{A_k} |Th_n - Sh_n| d\mu \\
&\geq \int_{A_k} |Th_n| d\mu - \int_{A_k} |Sh_n| d\mu \\
&\geq \alpha - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient bien $\|T\|_{e,w} \geq \alpha$. □

Remarque 1.50. 1) Dans le Théorème 1.49, on a pu conclure le même résultat que dans le Lemme 1.48 avec une hypothèse plus faible : on a mis "lim sup" au lieu de "lim inf". Dans ce cas particulier, on peut alléger l'hypothèse car les sous-normes $(P_k)_k$ sont ponctuellement décroissantes sur $L^p(\mu)$.

2) La deuxième partie résultat précédent est fausse pour $p \in (1, +\infty)$ car tout opérateur borné à valeurs dans $L^p(\mu)$ est faiblement compact d'après un argument de réflexivité.

Le résultat qui suit est la généralisation naturelle de [18, Lemme 3.4] pour $p \in [1, +\infty)$. La preuve peut s'adapter de leur méthode directement, mais nous allons l'énoncer comme une conséquence du Lemme 1.48.

Corollaire 1.51. *Soient* (Ω, μ) *un espace mesuré,* X *un espace de Banach* $T : X \to L^p(\mu)$ *un opérateur borné. Pour une suite* (A_k) *de sous-ensembles de* Ω *qui satisfait* $\mu(\bigcap_k A_k) = 0$, *on définit la suite* $(R_k)_k$ *d'opérateurs de projection par*

$$R_k : \left\{ \begin{array}{ccc} L^p(\mu) & \to & L^p(A_k, \mu) \\ f & \mapsto & f \mathbb{1}_{A_k}. \end{array} \right.$$

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, *l'opérateur* $T - R_k T$ *est compact, alors la norme essentielle de* T *est donnée par*

$$\|T\|_e = \lim_{k \to +\infty} \|R_k T\|.$$

Démonstration. Comme pour tout $x \in X$, $(\|R_k T(x)\|)_k$ est une suite décroissante, la suite $(\|R_k T\|)_n$ converge vers un nombre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ quand $k \to +\infty$. D'après la compacité de $(T - R_k T)$, on obtient clairement $\|T\|_e \leq \|R_k T\|$ pour tout k et donc $\|T\|_e \leq \alpha$. Pour la borne inférieure, on fixe une suite $h_n \in X$ telle que

$$\|R_n T(h_n)\| \geq \|R_n T\| - \frac{1}{n}.$$

Pour $k \leq n$, on a $\|R_k T(h_n)\| = \|T(h_n)\|_{L^p(A_k, \mu)} \geq \|R_n T(h_n)\|$. Donc, en appliquant le Théorème 1.49 avec la même suite $(A_k)_k \subset \Omega$ et la suite $(h_n) \in X$, on obtient bien

$$\|T\|_e \geq \alpha.$$

□

Exemple 1.52. L'hypothèse $(T - R_k T)$ est compact pour tout $k \in \mathbb{N}$ est satisfaite dans deux exemples naturels :

1) Si $Y = \ell^p$ et qu'on choisit $A_k = \{j \in \mathbb{N}, j \geq k\}$. Alors $T - R_k T$ est de rang fini, donc il est compact.
2) Soit $X = M^p_\Lambda$ et $Y = L^p(\mu)$, où μ est une mesure finie et positive sur $[0, 1]$. On considère l'opérateur d'inclusion $T : M^p_\Lambda \to L^p(\mu)$ défini par $T(f) = f$. Alors on verra dans la suite (voir le Th. 3.10) qu'en prenant $A_k = \{t \in [0, 1], t \geq 1 - 1/k\}$, l'opérateur $(T - R_k T)$ est nucléaire et donc compact. C'est pour l'appliquer dans ce cadre que les auteurs de [18] ont formulé ce lemme.

1.3 Mesures positives sur $[0, 1]$

Dans le chapitre 3, nous considérerons des mesures sur $[0, 1]$. Nous rappelons donc ici quelques résultats de base sur les mesures positives. D'autre part, nous introduisons des classes de mesures positives sur $[0, 1]$, dont la "croissance" au voisinage du point 1 est contrôlée de différentes manières, et nous établissons certaines de leurs propriétés. Nous noterons λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

1.3.1 Mesures sous-linéaires et moments

Définition 1.53. Nous noterons $\mathcal{M}^+([0, 1])$ l'ensemble des *mesures positives et finies* sur l'intervalle $[0, 1]$, et $\mathcal{M}^+([0, 1))$ désignera l'ensemble des mesures $\mu \in \mathcal{M}^+([0, 1])$ qui satisfont $\mu(\{1\}) = 0$. Pour $\mu \in \mathcal{M}^+([0, 1])$ on pourra voir μ comme une application σ-additive sur l'ensemble $\mathrm{Bor}([0, 1])$ des boréliens de $[0, 1]$:

$$\mu : \begin{cases} \mathrm{Bor}([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \longmapsto & \mu(A), \end{cases}$$

où μ satisfait $\mu(\emptyset) = 0$ et :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Bor}([0, 1]), \quad \mu\big(\bigcup_n A_n\big) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

On pourra aussi voir μ comme une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ de la manière suivante :

$$\Phi_\mu : \begin{cases} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[0,1]} f d\mu. \end{cases}$$

L'espace $\mathcal{M}([0, 1])$ des mesures complexes sur $[0, 1]$ peut être muni d'une structure d'espace de Banach, et d'après le théorème de représentation de Riesz (voir [48, Th. 6.19]) l'application $\mu \mapsto \Phi_\mu$ est une isométrie surjective de $\mathcal{M}([0, 1])$ vers l'espace dual $\mathcal{C}^*$.

Définition 1.54. Nous dirons qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+([0, 1])$ est *absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue* λ si il existe une fonction λ-intégrable $h : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout borélien $A \subset [0, 1]$, on a

$$\mu(A) = \int_A h(t)dt.$$

Nous noterons comme d'habitude $\mu \ll \lambda$. Dans ce cas, la fonction h ci dessus est appelée la *dérivée de Radon* ou bien la *densité* de μ, et on la note :

$$h = \frac{d\mu}{d\lambda}\cdot$$

D'après le théorème de Radon-Nikodym [48, Th. 6.10], les mesures absolument continues sont exactement les mesures μ telles que tout ensemble λ-négligeable est μ-négligeable.

Remarque 1.55. Les mesures de Carleson de L^p (c'est à dire les mesures μ telles que l'opérateur d'inclusion $J_\mu : L^p \to L^p(\mu)$ est borné) sont exactement les mesures μ telles que :

(a) μ est absolument continue par rapport à λ ;

(b) la densité $h = \dfrac{d\mu}{d\lambda}$ est essentiellement bornée sur $[0, 1]$.

En effet, il est clair que ces deux conditions entraînent $\forall f \in L^p, \|f\|_{L^p(\mu)} \leq \|h\|_\infty \|f\|_p$ et donc μ est une mesure de Carleson de L^p. Pour montrer la réciproque il suffit de tester les fonction indicatrices $\mathbb{1}_A$.

Nous introduisons des classes de mesures liées aux moments, qui nous permettront d'étudier les mesures de Carleson des espaces de Müntz.

Définition 1.56. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1])$ et $s \in (-1,+\infty)$. On définit le *moment* $\widehat{\mu}(s)$ par

$$\widehat{\mu}(s) = \int_{[0,1)} t^s d\mu.$$

Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$ et $p \in [1,+\infty)$, nous dirons que μ satisfait la condition $(B_p(\Lambda))$ lorsqu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{[0,1]} t^{p\lambda_n} d\mu \leq \frac{C}{\lambda_n}. \tag{$B_p(\Lambda)$}$$

Si μ satisfait $(B_p(\Lambda))$, alors la suite $\big(\lambda_n \widehat{\mu}(p\lambda_n)\big)_n$ est bornée, et μ satisfait $(B_q(\Lambda))$ pour tout $q > p$. On dit que μ satisfait *la condition* $(b_p(\Lambda))$ lorsqu'elle satisfait :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu = 0\cdot \tag{$b_p(\Lambda)$}$$

La classe de mesures suivante a été introduite dans [18].

Définition 1.57. Soit μ une mesure positive et finie sur $[0,1)$. Nous dirons que μ est *sous-linéaire* si il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varepsilon \in (0,1), \quad \mu([1-\varepsilon,1)) \leq C\varepsilon.$$

Dans ce cas on définit la *norme sous-linéaire* de μ par : $\|\mu\|_S = \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \frac{\mu([1-\varepsilon,1))}{\varepsilon}$. Nous dirons que μ est *sous-linéaire évanescente* si elle satisfait :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu([1-\varepsilon,1))}{\varepsilon} = 0.$$

Les mesures sous-linéaires évanescentes sont exactement les mesures sous-linéaires telles que la restriction $\mu'_k = \mu_{|[1-1/k,1]}$ satisfait : $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\mu'_k\|_S \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Remarque 1.58. *mesures de Carleson de* H^2.
L'espace de Hardy H^2 est défini comme le complété des polynômes pour la norme suivante :

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{r<1} \Big(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un espace de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Le principe de Littlewood stipule que pour toute fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, l'opérateur de composition $C_\varphi : H^2 \to H^2$ défini par $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ est borné. En 1962, L. Carleson a généralisé ce principe [16, Th. 1] en caractérisant les mesures μ sur $\mathbb{D}$ telles que l'opérateur d'inclusion $J_\mu : H^2 \to H^2$ est borné, ces mesures donc sont appelées les mesures de Carleson. Pour $\xi \in \partial\mathbb{D}$ et $r > 0$, on définit la fenêtre de Carleson $V_\xi(r)$ par

$$V_\xi(r) = D(\xi, r) \cap \mathbb{D}.$$

Alors $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ est une mesure de Carleson de H^2 si et seulement si il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\forall r > 0, \forall \xi \in \partial\mathbb{D}, \quad \mu(V_\xi(r)) \leq Cr.$$

Cette condition géométrique sur le comportement de μ à la frontière de $\mathbb{D}$ est ressemblante à la condition géométrique des mesures sous-linéaires au voisinage de 1.

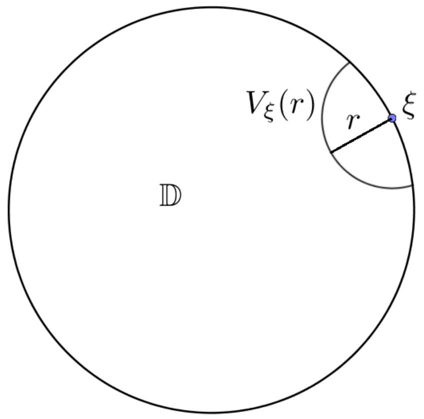

FIGURE 1.1 – Fenêtre de Carleson

Remarque 1.59. Les mesures sous-linéaires satisfont la condition ($B_p(\Lambda)$) pour tout $p \in [1, +\infty)$ et pour toute suite Λ. En effet, d'après la formule de transfert, pour toute mesure positive ν sur $[0,1)$ on a

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\nu &= \int_0^{+\infty} \nu(\{t \in [0,1), t^{\lambda_n} \geq r\}) dr \\ &= \int_0^1 \nu([r^{\frac{1}{\lambda_n}}, 1)) dr.\end{aligned}$$

En appliquant cette identité pour une mesure sous-linéaire μ, puis pour la mesure de Lebesgue λ on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu &= \int_0^1 \mu([r^{\frac{1}{\lambda_n}}, 1)) dr \\ &\leq \|\mu\|_S \int_0^1 (1 - r^{\frac{1}{\lambda_n}}) dr \\ &= \frac{\|\mu\|_S}{\lambda_n + 1}\cdot\end{aligned}$$

Ainsi on obtient en toute généralité : μ sous-linéaire $\Rightarrow$ ($B_1(\Lambda)$) $\Rightarrow$ ($B_p(\Lambda)$). De même, supposons que μ est sous-linéaire évanescente. Pour tout $\delta > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\varepsilon < \frac{1}{k}$, on a

$$\mu([1-\varepsilon, 1)) \leq \delta\varepsilon.$$

En d'autres termes, la mesure $\mu'_k = \mu_{|(1-\frac{1}{k},1)}$ est sous-linéaire et satisfait $\left\|\mu'_k\right\|_S \leq \delta$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu &= \int_{[0,1-\frac{1}{k}]} \lambda_n t^{\lambda_n} d\mu + \int_{[1-\frac{1}{k},1)} \lambda_n t^{\lambda_n} d\mu \\ &\leq \lambda_n (1 - \frac{1}{k})^{\lambda_n} + \delta \int_{1-\frac{1}{k}}^1 \lambda_n t^{\lambda_n} dt \\ &\leq \lambda_n (1 - \frac{1}{k})^{\lambda_n} + \delta.\end{aligned}$$

On obtient $\limsup_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu \leq \delta$. Comme δ est arbitrairement petit, on a montré en toute généralité les implications : μ sous-linéaire évanescente $\Rightarrow$ ($b_1(\Lambda)$) $\Rightarrow$ ($b_p(\Lambda)$).

Le lemme suivant généralise ce principe pour d'autres types de croissances de mesures et pour l'intégrale de toutes les fonctions croissantes. La preuve repose sur une intégration par partie.

Lemme 1.60. [18, Lemme 2.2] *Soit $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1])$ et $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive, croissante, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\rho(0) = 0$. Supposons que pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, la mesure μ satisfait : $\mu([1-\varepsilon, 1]) \leq \rho(\varepsilon)$. Alors pour toute fonction g continue, positive, et croissante sur $[0,1]$, on a*

$$\int_{[0,1]} g d\mu \leq \int_0^1 g(t)\rho'(1-t)dt.$$

En appliquant le Lemme 1.60 pour la fonction $\rho(t) = t\|\mu\|_S$, on obtient directement : si μ est sous-linéaire et f est croissante positive sur $[0,1]$, alors

$$\int_{[0,1)} f d\mu \leq \|\mu\|_S \int_0^1 f(t)dt.$$

Dans la version originale, les auteurs ont énoncé [18, Lemme 2.2] quand ρ est une fonction $\mathcal{C}^1$. Mais leur preuve requiert uniquement l'hypothèse "ρ est absolument continue". En particulier on peut l'appliquer avec la fonction $\rho(t) = t^\beta$ pour tout $\beta > 0$ dans la proposition qui va suivre. Rappelons qu'une suite Λ est *sous-géométrique* si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_{n+1} \leq M\lambda_n$.

Proposition 1.61. *Soient $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1])$, et $\alpha > -1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mu([1-\varepsilon, 1)) \leq C\varepsilon^{1+\alpha}, \quad \forall \varepsilon \in (0,1);$$

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction g croissante, positive et $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1)$, on a

$$\int_{[0,1)} g d\mu \leq C \int_0^1 g(t)(1-t)^\alpha dt;$$

(iii) Il existe une constante $C > 0$ et une suite $(s_n)_n \in \mathbb{R}_+$ sous-géométrique, qui tend vers $+\infty$ telle que :

$$\int_{[0,1)} t^{s_n} d\mu \leq \frac{C}{s_n^{1+\alpha}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus, si $(s_n)_n$ est sous-géométrique et tend vers $+\infty$, alors on a

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1)} \frac{\mu\big([1-\varepsilon, 1)\big)}{\varepsilon^{1+\alpha}} \approx \sup_{n \geq 0} s_n^{1+\alpha} \Big(\int_{[0,1]} t^{s_n} d\mu \Big),$$

où les constantes sous-jacentes ne dépendent que de Λ et α.

Démonstration. Soit μ une mesure satisfaisant (i) et $C_1 = \sup_{\varepsilon \in (0,1)} \dfrac{\mu([1-\varepsilon, 1))}{\varepsilon^{\alpha+1}}$. On applique le Lemme 1.60 avec la fonction $\rho(t) = C_1.t^{1+\alpha}$ et on obtient :

$$\int_{[0,1)} g d\mu \leq \int_0^1 g(t)\rho'(1-t)dt \leq C_1(\alpha+1) \int_0^1 g(t)(1-t)^\alpha dt.$$

Supposons maintenant que (ii) est satisfait, avec une constante C_2. Soit $(s_n)_n$ une suite sous-géométrique qui tend vers l'infini. En appliquant l'inégalité de (ii) aux fonctions t^{s_n}

(croissantes, positives) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} t^{s_n} d\mu &\leq C_2 \int_0^1 t^{s_n}(1-t)^\alpha dt \\ &= C_2 B(s_n+1, \alpha+1) \\ &= C_2 \frac{\Gamma(s_n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(s_n+\alpha+2)},\end{aligned}$$

où B est la fonction beta et Γ la fonction gamma d'Euler. L'approximation de Stirling donne un équivalent de cette quantité quand $s_n \to +\infty$, on trouve alors :

$$\int_{[0,1)} t^{s_n} d\mu \leq \frac{C_2\Gamma(\alpha+1)}{s_n^{\alpha+1}} \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Supposons maintenant que μ satisfait la condition (iii), et posons $C_3 = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n^{1+\alpha} \int_{[0,1)} t^{s_n} d\mu$. Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} t^{s_n} d\mu &\geq \int_{[1-\frac{1}{s_n},1)} t^{s_n} d\mu \\ &\geq (1-\frac{1}{s_n})^{s_n} \mu([1-\frac{1}{s_n},1)) \\ &\geq \frac{1}{3}\mu([1-\frac{1}{s_n},1)),\end{aligned}$$

car la suite $(1-\frac{1}{s_n})^{s_n}$ tend vers $\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{s_{n+1}} \leq \varepsilon < \frac{1}{s_n}\cdot$ On peut supposer que $n \geq n_0$ car l'inégalité de (i) est trivialement vérifiée quand ε est loin de 0. Pour tout $\varepsilon < \frac{1}{s_{n_0}}$, on a

$$\begin{aligned}\mu([1-\varepsilon,1)) &\leq \mu\big([1-\frac{1}{s_n},1)\big) \\ &\leq 3\int_{[0,1)} t^{s_n} d\mu \\ &\leq \frac{3C_3}{s_n^{1+\alpha}} \\ &\leq 3C_3\Big(\sup_k \frac{s_{k+1}}{s_k}\Big)^{1+\alpha} \varepsilon^{1+\alpha}.\end{aligned}$$

□

Nous allons pouvons appliquer ce résultat pour caractériser les mesures sous-linéaires. Le résultat suivant est l'équivalent de [18, Prop. 4.3].

Corollaire 1.62. *Soient $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1])$, $p \in [1,+\infty)$, et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante, sous-géométrique, qui tend vers $+\infty$. Alors il existe alors deux constantes C_1, C_2 qui ne dépendent que de p et Λ (mais pas de μ) telles que :*

$$C_1 \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu\Big) \leq \|\mu\|_S \leq C_2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu\Big). \tag{1.7}$$

En particulier dans ce cas, la condition $(B_p(\Lambda))$ ne dépend pas de p, et on a

$$\mu \text{ satisfait } (B_p(\Lambda)) \iff \mu \text{ est sous-linéaire.}$$

De plus, la condition $(b_p(\Lambda))$ ne dépend pas de p et on a

$$\mu \text{ satisfait } (b_p(\Lambda)) \iff \mu \text{ est sous-linéaire évanescente.}$$

Démonstration. L'inégalité de gauche de (1.7) suit en testant les fonctions monômes comme dans la Remarque 1.59. L'inégalité de droite suit du point $(iii) \Rightarrow (i)$ dans la Proposition 1.61 car Λ est sous-géométrique. D'après (1.7), pour tous $p, q \in [1, +\infty)$, les quantités $(\sup_n \lambda_n \widehat{\mu}(p\lambda_n))$ et $(\sup_n \lambda_n \widehat{\mu}(q\lambda_n))$ sont équivalentes à des constantes qui dépendent de p, q près. Ainsi la condition $(B_p(\Lambda))$ ne dépend pas de p, et elle est équivalente à la sous-linéarité de μ.

Il nous reste à montrer le dernier point. Soit $\varepsilon > 0$ et μ une mesure satisfaisant $(b_p(\Lambda))$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq m, \quad \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu \leq \varepsilon.$$

D'autre part, pour tout k fixé, on pose $\mu'_k = \mu_{|(1-1/k,1)}$ la restriction de μ au voisinage de 1. D'après (1.7) on a

$$\begin{aligned}
\|\mu'_k\|_S &\leq C_2 \sup_n \int_{[0,1)} \lambda_n t^{p\lambda_n} d\mu'_k \\
&\leq \max\left\{ \sup_{n\geq m} \int_{[0,1)} \lambda_n t^{p\lambda_n} d\mu \ ; \ \sup_{n<m} \int_{[1-1/k,1)} \lambda_n t^{p\lambda_n} d\mu \right\} \\
&\leq \varepsilon + \sup_{0\leq n<m} \lambda_n \int_{[1-1/k,1)} t^{p\lambda_n} d\mu.
\end{aligned}$$

Dès lors que $k \geq \lambda_m^2$, on a pour tout $n \leq m$:

$$\int_{(1-1/k,1)} \lambda_n t^{p\lambda_n} d\mu \leq \frac{\lambda_n \mu([0,1))}{k} \leq \frac{\mu([0,1))}{\sqrt{k}},$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\mu'_k\|_S \leq \varepsilon$, donc μ est sous-linéaire évanescente. $\square$

1.3.2 Moments généralisés

Désormais, nous fixons une suite strictement croissante $\Lambda = (\lambda_n)_n$ indexée sur $\mathbb{Z}$ qui satisfait le critère de Müntz. Tous les résultats peuvent s'adapter sans difficulté si Λ est indexée sur $\mathbb{N}$. Nous allons définir une nouvelle suite de "moments généralisés de μ" pour une mesure μ sur $[0,1]$, afin de pouvoir estimer la norme de l'opérateur suivant :

$$T^\Lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} c_{00} & \longrightarrow & M(\Lambda) \\ b & \longmapsto & \sum_n b_n t^{\lambda_n}, \end{array} \right.$$

où c_{00} est muni d'une norme $\| \ . \ \|_{\ell^p(w)}$ et $M(\Lambda)$ de la norme $\| \ . \ \|_{L^p(\mu)}$. Nous le noterons alors $T^{w,\Lambda}_{\mu,p} : \ell^p(w) \to L^p(\mu)$.

Définition 1.63. Soient $w = (w_n)_n \in \mathbb{R}_+$ une suite de poids, μ une mesure positive et finie sur $[0,1]$, $\Lambda = (\lambda_n)_n$ une suite satisfaisant la condition de Müntz et $p \in [1, +\infty)$. Nous introduisons la suite $(D^{w,\Lambda}_n(\mu, p))_n$ de moments généralisés de μ, définie pour $n \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

$$D^{w,\Lambda}_n(\mu, p) = \left(\int_{[0,1)} w_n^{-\frac{1}{p}} t^{\lambda_n} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-\frac{1}{p}} t^{\lambda_k} \right)^{p-1} d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cette suite dépend de w, μ, Λ, p, et elle prend (a priori) ses valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Nous allons voir que cette suite est liée de très près aux nombres d'approximation du plongement $T^{w,\Lambda}_{\mu,p}$ dont on a parlé précédemment.

Avant toute chose, nous pouvons signaler que l'on a

$$D_n^{w,\Lambda}(\mu,p) \geq \|t^{\lambda_n}\|_{L^p(\mu)} w_n^{-\frac{1}{p}},$$

en regardant uniquement le terme $k=n$ de la somme qui définit les moments généralisés. La propriété suivante apporte plus de précisions sur cette inégalité, et elle jouera un rôle clef dans la suite :

Proposition 1.64. *Soit $p \in [1,+\infty)$. Supposons que $(D_n^{w,\Lambda}(\mu,p))_n$ est une suite bornée de nombres réels. Alors on a pour tout $b \in c_{00}$,*

$$\Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n t^{\lambda_n} \Big\|_{L^p(\mu)} \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^p \big(D_n^{w,\Lambda}(\mu,p)\big)^p w_n \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Pour $p=1$ le résultat est évident. Supposons maintenant que $p>1$. Pour tout $t\in[0,1)$ et $n\in\mathbb{N}$, on a

$$b_n t^{\lambda_n} = b_n w_n^{\frac{1}{pp'}} t^{\frac{\lambda_n}{p}} \times w_n^{-\frac{1}{pp'}} t^{\frac{\lambda_n}{p'}},$$

en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\Big| \sum b_n t^{\lambda_n} \Big| \leq \Big(\sum_n |b_n|^p w_n^{\frac{1}{p'}} t^{\lambda_n} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_k w_k^{-\frac{1}{p}} t^{\lambda_k} \Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Et finalement on trouve

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} \Big| \sum b_n t^{\lambda_n} \Big|^p d\mu &\leq \int_{[0,1)} \sum |b_n|^p w_n . w_n^{-\frac{1}{p}} t^{\lambda_n} \Big(\sum_k w_k^{-\frac{1}{p}} t^{\lambda_k} \Big)^{p-1} d\mu \\ &= \sum_n |b_n|^p w_n \big(D_n^{w,\Lambda}(\mu,p)\big)^p.\end{aligned}$$

□

La Proposition 1.64 nous suggère de définir l'opérateur suivant :

Définition 1.65. Soient $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1])$, $w=(w_n)_n$ une suite de poids positifs, Λ une suite strictement croissante et $p\in[1,+\infty)$. Si $(D_n^{w,\Lambda}(\mu,p))_n$ est une suite bornée (de nombres réels) on peut définir l'opérateur suivant :

$$T_{\mu,p}^{w,\Lambda} : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^p(w) & \longrightarrow & L^p(\mu) \\ b & \longmapsto & \sum_n b_n t^{\lambda_n}. \end{array} \right.$$

D'après la proposition 1.64, l'opérateur $T_{\mu,p}^{w,\Lambda}$ est borné et il satisfait

$$\|T_{\mu,p}^{w,\Lambda}\| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} D_n^{w,\Lambda}(\mu,p).$$

De plus, pour des raisons techniques, nous introduisons la notation suivante : pour une suite bornée $(u_n)_n$ dans $\mathbb{R}_+$, on définit $(u_N^*)_N$ le *réarrangement décroissant* de $(u_n)_n$ par :

$$u_N^* = \inf_{\substack{A\subset\mathbb{Z}\\|A|=N}} \sup\{u_n, n\notin A\}. \tag{1.8}$$

On a $\lim\limits_{N\to+\infty} u_N^* = \limsup\limits_{|n|\to+\infty} u_n$.

Maintenant, on peut établir le principal résultat de cette partie.

Théorème 1.66. *Si $\big(D_n^{w,\Lambda}(\mu,p)\big)_n$ est une suite bornée de réels, alors on a une majoration des nombres d'approximation de $T_{\mu,p}^{w,\Lambda}$: pour tout $N\in\mathbb{N}$,*

$$a_{N+1}(T_{\mu,p}^{w,\Lambda}) \leq \big(D_N^{w,\Lambda}(\mu,p)\big)^* \ ;$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ et A une partie finie de $\mathbb{Z}$ de cardinal N. On définit l'opérateur R, de rang N, par

$$R = \sum_{n \in A} \big(y_n \otimes e_n^*\big),$$

où $y_n \in L^p(\mu)$ est le monôme défini par $y_n(t) = t^{\lambda_n}$ et e_n^* est la n-ième forme linéaire coordonnée sur $\ell^p(w)$, définie par $e_n^*(b) = b_n$. On a

$$a_{N+1}(T_{\mu,p}^{w,\Lambda}) \leq \left\| T_{\mu,p}^{w,\Lambda} - R \right\| = \left\| T_{\mu,p}^{w,\Lambda} - \sum_{n \in A} \big(y_n \otimes e_n^*\big) \right\|.$$

Fixons un élément $b \in \ell^p(w)$; en appliquant la Proposition 1.64 on obtient :

$$\left\| T_{\mu,p}^{w,\Lambda}(b) - \sum_{n \in A} e_n^*(b) y_n \right\| = \left\| \sum_{n \notin A} b_n t^{\lambda_n} \right\|_{L^p(\mu)} \leq \sup_{n \notin A} D_n^{w,\Lambda}(\mu, p) \|b\|_{\ell^p(w)}.$$

On obtient le résultat en prenant la borne inférieure parmi les parties $A \subset \mathbb{Z}$ satisfaisant $|A| = N$, d'après la Définition 1.65. $\square$

Remarque 1.67. On peut interpréter le résultat précédent avec l'opérateur diagonal $\mathcal{D}$ défini par :

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^p(w) & \to & \ell^p(w) \\ (b_n)_n & \mapsto & (b_n D_n^{w,\Lambda}(\mu, p))_n. \end{array} \right.$$

Il agit sur la base canonique de $\ell^p(w)$ et ses entrées diagonales sont les nombres $D_n^{w,\Lambda}(\mu, p)$. Si la suite $(D_n^{w,\Lambda}(\mu, p))_n$ est bornée, alors $T_{\mu,p}^{w,\Lambda}$ et $\mathcal{D}$ sont bornés, et on a

$$\forall b \in \ell^p(w), \ \|T_{\mu,p}^{w,\Lambda}(b)\|_{L^p(\mu)} \leq \|\mathcal{D}(b)\|_{\ell^p(w)}.$$

Cette majoration entraîne $a_{N+1}(T_{\mu,p}^{w,\Lambda}) \leq a_{N+1}(\mathcal{D})$, et les nombres d'approximation de $\mathcal{D}$ sont les termes $(D_n^{w,\Lambda}(\mu, p))_n$ réarrangés de manière décroissante.

Chapitre 2

Espaces de Müntz lacunaires

Sommaire

2.1 Le plongement T_p^Λ de la base canonique de $\ell^p(w(p))$ 42

2.1.1 Estimation de $\|T_p^\Lambda\|$ quand $(\lambda_n + 1/p)_n$ est lacunaire 42

2.1.2 Estimation asymptotique de $\|T_p^\Lambda\|$, quand $p \to +\infty$ 47

2.2 Ensembles lacunaires avec un grand indice 52

2.2.1 Quand M_Λ^1 est $(1+\varepsilon)$-isométrique à ℓ^1 53

2.2.2 Quand M_Λ^p est $(1+\varepsilon)$-isométrique à ℓ^p, avec $p \in (1, +\infty)$ 57

2.2.3 Quand M_Λ^∞ est $(1+\varepsilon)$-isométrique à c 60

Dans ce chapitre, nous revisitons les théorèmes de Gurariy-Macaev (Th. 1.25 et 1.26) pour obtenir des constantes d'équivalence de normes plus explicites, et surtout plus proche de 1. Nous rappelons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est lacunaire (au sens de Hadamard) s'il existe $r > 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u_{n+1} \geq r u_n.$$

Nous dirons dans ce cas que $(u_n)_n$ est r-lacunaire. Parfois nous noterons r_u *l'indice de lacunarité* de u, défini par

$$r_u = \inf_{n\in\mathbb{Z}} \frac{u_{n+1}}{u_n}\cdot$$

Nous dirons que u est *sous-géométrique* si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_{n+1} \leq M u_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Au contraire, u sera dite *super-lacunaire* si elle satisfait

$$\lim_{|n|\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

Certains résultats principaux de ce chapitre apparaissent dans [25] et [26] et ont été obtenus en collaboration avec P. Lefèvre.

2.1 Le plongement T_p^Λ de la base canonique de $\ell^p(w(p))$

Dans toute cette partie, p sera un nombre (fini) dans l'intervalle $[1,+\infty)$. Nous allons redémontrer la majoration du théorème de Gurariy-Macaev avec une nouvelle méthode, afin d'avoir des estimations plus explicites que celles de la preuve originale.

2.1.1 Estimation de $\|T_p^\Lambda\|$ quand $(\lambda_n+1/p)_n$ est lacunaire

Définition 2.1. Pour $b=(b_n)_n\in c_{00}$, on définit le polynôme de Müntz suivant :

$$T^\Lambda(b)=\sum_n b_n y_n,$$

où $y_n\in M(\Lambda)$ est le monôme défini par $y_n(t)=t^{\lambda_n}$.

L'application $T^\Lambda : c_{00}\to M(\Lambda)$ est linéaire et elle satisfait $T^\Lambda(e_n)=y_n$, où e_n est le n-ième vecteur de la base canonique de ℓ^p et c_0. Comme on a $\|y_n\|_p=(p\lambda_n+1)^{-1/p}$, nous sommes amenés à définir la suite de poids suivante :

Définition 2.2. Pour $p\in[1,+\infty)$ et $\Lambda=(\lambda_n)_n\subset(-\frac{1}{p},+\infty)$ une suite strictement croissante. On définit la suite de poids $w(p)=(w_n(p))_{n\in\mathbb{Z}}$, par

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad w_n(p)=(p\lambda_n+1)^{-1}.$$

Avec ces notations, on obtient alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$\|T^\Lambda(e_n)\|_p=\|t^{\lambda_n}\|_p=(p\lambda_n+1)^{-\frac{1}{p}}=w_n(p)^{\frac{1}{p}}=\|e_n\|_{\ell^p(w(p))}.$$

Si $(\lambda_n+1/p)_n$ est lacunaire, d'après le théorème de Gurariy-Macaev 1.25 il existe deux constantes $C_1,C_2\in\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall b\in c_{00},\quad C_1\|b\|_{\ell^p(w(p))}\le\|T^\Lambda(b)\|_p\le C_2\|b\|_{\ell^p(w(p))},$$

donc T^Λ se prolonge en un isomorphisme que nous noterons T_p^Λ défini par :

$$T_p^\Lambda:\left\{\begin{array}{ccc}\ell^p(w(p)) & \longrightarrow & M_\Lambda^p\\ b & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n y_n,\end{array}\right.$$

L'opérateur T_p^Λ réalise une isométrie sur la base canonique de $\ell^p(w(p))$.

Remarque 2.3. L'opérateur T_1^Λ est de norme 1. En effet, pour $b\in c_{00}$ on a

$$\begin{aligned}\|T^\Lambda(b)\|_1&=\int_0^1\Big|\sum_n b_n t^{\lambda_n}\Big|dt\\ &\le\sum_n|b_n|\frac{1}{\lambda_n+1}\\ &=\|b\|_{\ell^1(w(1))},\end{aligned}$$

et comme c_{00} est dense dans $\ell^1(w(1))$ on obtient $\|T_1^\Lambda\|\le 1$. Ce résultat ne requiert pas d'hypothèse de lacunarité de la suite $(\lambda_n+1)_n$.

Pour traiter le cas $p>1$, on introduit une suite de nombres qui dépendent de Λ.

Définition 2.4. Soit $p\in[1,+\infty)$ et $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}\subset(-\frac{1}{p},+\infty)$. On définit la suite suivante :

$$\begin{aligned}D_n^\Lambda(p)&=\Big(\int_0^1(p\lambda_n+1)^{\frac{1}{p}}t^{\lambda_n}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(p\lambda_k+1)^{\frac{1}{p}}t^{\lambda_k}\Big)^{p-1}dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &=\Big(\int_{[0,1)}g_n\big(\sum_k g_k\big)^{p-1}dm\Big)^{\frac{1}{p}}\quad,\end{aligned}$$

où les $(g_n)_n$ sont les monômes normalisés définis par $g_n(t)=(p\lambda_n+1)^{\frac{1}{p}}t^{\lambda_n}$.

Il s'agit de la même suite que dans la Définition 1.63 en considérant le cas particulier des poids $w(p) = (w_n(p))_n = ((p\lambda_n + 1)^{-1})$ et de la mesure de Lebesgue λ. On a alors :

$$D_n^\Lambda(p) = D_n^{w(p),\Lambda}(\lambda, p).$$

Comme la mesure $\mu = \lambda$ sera fixée dans cette partie, et que la suite de poids $w(p)$ ne dépend que de p et Λ, on peut alléger la notation générale des moments généralisés. Cette suite est très utile grâce au lemme suivant, qui est une reformulation de la Proposition 1.64 :

Lemme 2.5. *Soit $p \in [1, +\infty)$. Si $(D_n^\Lambda(p))_n$ est une suite bornée, on a*

$$\forall a \in c_{00}, \quad \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^{\lambda_n} \Big\|_p \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|a_n|^p}{p\lambda_n + 1} D_n^\Lambda(p)^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Soit $w(p) = (w_n(p))_n$ la suite de poids définie par $w_n(p) = (p\lambda_n + 1)^{-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Comme on a $D_n^{w(p),\Lambda}(\lambda, p) = D_n^\Lambda(p)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la Proposition 1.64 donne directement le résultat. □

Nous pouvons maintenant estimer la norme de T_p^Λ grâce aux nombres $D_n^\Lambda(p)$.

Proposition 2.6. *Soit $p \in [2, +\infty)$. Pour toute suite Λ telle que $(\lambda_n + 1/p)_n$ est r-lacunaire, on a l'estimation suivante :*

$$\|T_p^\Lambda\| \leq \Big(1 + \frac{2(p')^{\frac{1}{p-1}}}{r^{\frac{1}{p(p-1)}} - 1}\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Démonstration. D'après le Lemme 2.5, on a

$$\forall b \in c_{00}, \quad \|T_p^\Lambda(b)\|_p \leq \Big(\sup_{n\in\mathbb{Z}} D_n^\Lambda(p)\Big) \|b\|_{\ell^p(w(p))}.$$

Il suffit donc d'estimer les $D_n^\Lambda(p)$. Nous noterons $q_n = (p\lambda_n + 1)$ pour alléger les écritures. Comme $p - 1 \geq 1$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} D_n^\Lambda(p)^{p'} &= \Big(\int_0^1 \Big(\sum_k g_k\Big)^{p-1} g_n dt \Big)^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq \sum_k \|g_k\|_{L^{p-1}(g_n dt)} \\ &= \sum_k \Big(q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}} \int_0^1 t^{\lambda_n + (p-1)\lambda_k} dt \Big)^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a

$$q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}} \int_0^1 t^{\lambda_n + (p-1)\lambda_k} dt = \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\lambda_n + (p-1)\lambda_k + 1} = \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p} + \frac{q_k}{p'}}.$$

À n fixé, nous allons estimer la somme sur k de ces termes en gardant simplement le nombre du dénominateur qui est asymptotiquement le plus grand (c'est une technique très courante pour étudier les suites lacunaires). Rappelons que la suite $(q_j)_j$ est r-lacunaire, on obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
D_n^\Lambda(p)^{p'} &\le \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p} + \frac{q_k}{p'}} \right)^{\frac{1}{p-1}} + 1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p} + \frac{q_k}{p'}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{n-1} p^{\frac{1}{p-1}} \Big(\frac{q_k^{\frac{1}{p'}}}{q_n^{\frac{1}{p'}}} \Big)^{\frac{1}{p-1}} + 1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (p')^{\frac{1}{p-1}} \Big(\frac{q_n^{\frac{1}{p}}}{q_k^{\frac{1}{p}}} \Big)^{\frac{1}{p-1}} \\
&\le 1 + p^{\frac{1}{p-1}} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \Big(\frac{1}{r^{\frac{1}{p}}} \Big)^{n-k} + (p')^{\frac{1}{p-1}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{r^{\frac{1}{p(p-1)}}} \Big)^{k-n} \\
&\le 1 + \frac{2p^{\frac{1}{p-1}}}{r^{\frac{1}{p(p-1)}} - 1},
\end{aligned}$$

car $p \ge p'$. D'après le Lemme 2.5 on obtient ainsi

$$\|T_p^\Lambda\| \le \sup_n D_n^\Lambda(p) \le \Big(1 + \frac{2p^{\frac{1}{p-1}}}{r^{\frac{1}{p(p-1)}} - 1} \Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

□

En particulier, ce résultat garantit que la norme de T_p^Λ est proche de 1 si $(\lambda_n + 1/p)$ est r-lacunaire et r est grand. C'est ce qui nous intéressera particulièrement dans la deuxième partie de ce chapitre.

Remarque 2.7. Cette méthode permettrait aussi d'obtenir une borne de $\|T_p^\Lambda\|$ pour $p \in (1, 2)$. Comme $p - 1 < 1$, on peut appliquer l'inégalité $\| \, . \, \|_{\ell^1} \le \| \, . \, \|_{\ell^{p-1}}$ à la suite $(g_k(t))_k$ pour tout $t \in [0, 1)$, et on obtient :

$$D_n^\Lambda(p)^p = \int_0^1 g_n \Big(\sum_k g_k \Big)^{p-1} dt \le \sum_k \int_0^1 g_n g_k^{p-1} dt = \sum_k \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p} + \frac{q_k}{p'}},$$

et la suite se déroule sans surprise supplémentaire pour obtenir :

$$\|T_p^\Lambda\| \le \left(1 + \frac{2p'}{r^{\frac{1}{p'}} - 1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mais le problème c'est que cette borne n'est pas très précise lorsque p est proche de 1 : l'expression de droite tend vers $+\infty$ quand $p \to 1$ et r est fixé, alors que l'on a toujours $\|J_\Lambda\|_1 = 1$, et sans même supposer que Λ est lacunaire (voir la Remarque 2.3). Pour le plaisir de l'analyse, nous allons raffiner ce résultat avec un théorème d'interpolation.

L'interpolation de Riesz-Thorin peut sembler une bonne idée mais elle ne s'applique pas sur ce problème : les opérateurs T_p^Λ sont définis sur des espaces $\ell^p(w(p))$, et le poids $w(p) = (w_n(p))_n = \big((p\lambda_n + 1)^{-1} \big)_n$ dépend de p. Même les versions "à poids" de la littérature ne semblent pas répondre à ce problème.

Théorème 2.8. *Soient $r > 1$, $p_0 < p_1 \in [1, +\infty)$ et $p \in [p_0, p_1]$. On suppose qu'il existe deux constantes $M_0, M_1 \in \mathbb{R}_+$ telles que :*

(a) pour toute suite $\Psi = (\psi_n)_n$ satisfaisant $(\psi_n + 1/p_0)_n$ est r-lacunaire, on a

$$\|T_{p_0}^\Psi\| \le M_0 \quad ;$$

(b) pour toute suite $\Phi = (\phi_n)_n$ satisfaisant $(\phi_n + 1/p_1)_n$ est r-lacunaire, on a

$$\|T_{p_1}^\Phi\| \le M_1.$$

Alors pour toute suite $\Lambda = (\lambda_n)_n$ telle que $(\lambda_n + 1/p)_n$ est r-lacunaire, on a

$$\|T_p^\Lambda\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

où $\theta \in [0,1]$ est le nombre tel que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

La preuve s'inspire de celle du théorème de Riesz-Thorin [11, Th. 1.1.1], mais elle requiert un argument supplémentaire qui tient compte de la décomposition de Clarkson-Erdös des fonctions.

Démonstration. Soit $p \in (p_0, p_1)$, alors on a $\theta = \frac{p_0^{-1} - p^{-1}}{p_0^{-1} - p_1^{-1}} \in (0,1)$. On définit les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p'(z)} = \frac{1-z}{p_0'} + \frac{z}{p_1'},$$

pour $z \in \overline{U}$, où $U = \{u \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(u) \in (0,1)\}$. Soient une suite $a \in c_{00}$ et une fonction $g \in L^{p'}$ telles que $\|a\|_{\ell^p(w(p))} = \|g\|_{p'} = 1$. On peut supposer sans perte de généralité que a et g sont positives. On définit la fonction holomorphe sur U suivante :

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^{\frac{p}{p(z)}} \int_0^1 t^{\frac{p}{p(z)}\lambda_n} g(t)^{\frac{p'}{p'(z)}} \, dt \, .$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|F(ix)| &\leq \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^{\frac{p}{p_0}} t^{\frac{p\lambda_n}{p_0}} g(t)^{\frac{p'}{p_0'}} \, dt \\
&\leq \Big(\int_0^1 g(t)^{p'} dt \Big)^{\frac{1}{p_0'}} \left(\int_0^1 \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n t^{\psi_n} \Big)^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= \|T_{p_0}^\Psi(b)\|_{L^{p_0}},
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder, en posant les notations $b_n = a_n^{p/p_0}$ et $\psi_n = \dfrac{p}{p_0}\lambda_n$. La suite $(\psi_n + 1/p_0)_n$ est $r-$lacunaire car $(\lambda_n + 1/p)_n$ l'est. D'après l'hypothèse (a), on a

$$\begin{aligned}
|F(ix)| \leq \|T_{p_0}^\Psi(b)\|_{p_0} &\leq M_0 \Big(\sum_n \frac{b_n^{p_0}}{p_0 \psi_n + 1} \Big)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= M_0 \Big(\sum_n \frac{a_n^p}{p\lambda_n + 1} \Big)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= M_0.
\end{aligned}$$

De même, en posant $c_n = a_n^{p/p_1}$ et $\phi_n = \dfrac{p}{p_1}\lambda_n$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(1+ix)| &\leq \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^{\frac{p}{p_1}} t^{\frac{p\lambda_n}{p_1}} g(t)^{\frac{p'}{p_1'}} \, dt \\
&\leq \Big(\int_0^1 g(t)^{p'} dt \Big)^{\frac{1}{p_1'}} \left(\int_0^1 \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n t^{\phi_n} \Big)^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \|T_{p_1}^\Phi(c)\|_{p_1} \\
&\leq M_1,
\end{aligned}$$

en appliquant l'hypothèse (b) sur la suite $\Phi_n = (\phi_n)_n$ car $(\phi_n + 1/p_1)$ est r-lacunaire. On termine la preuve d'une façon standard, et d'après le théorème des trois droites d'Hadamard on obtient alors :

$$\|T_p^\Lambda(a)\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

□

Corollaire 2.9. *Soit $p \in (1,2)$ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_n$ une suite telle que $(\lambda_n + 1/p)_n$ est r-lacunaire. Alors on a*

$$\|T_p^\Lambda\| \leq \Big(1 + \frac{4}{r^{\frac{1}{2}} - 1}\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Démonstration. Nous appliquons le Théorème 2.8 avec $p_0 = 1$ et $p_1 = 2$. D'après la Remarque 2.3, pour tout Ψ tel que $(\psi_n + 1)_n$ est r-lacunaire, on a $\|T_1^\Psi\| \leq 1$. D'autre part, d'après la Proposition 2.6, pour tout Φ tel que $(\phi_n + 1/2)_n$ est r-lacunaire, on a

$$\|T_2^\Phi\| \leq \Big(1 + \frac{4}{r^{\frac{1}{2}} - 1}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème d'interpolation donne alors la borne $\|T_p^\Lambda\| \leq \Big(1 + \frac{4}{r^{\frac{1}{2}} - 1}\Big)^{\theta/2}$, où $\theta = 2/p'$. □

Nous finissons cette partie avec une caractérisation de la bornitude de T_p^Λ.

Théorème 2.10. *Soit $p \in [1, +\infty)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'opérateur $T_p^\Lambda : \ell^p(w(p)) \to M_\Lambda^p$ est borné ;

(ii) la suite $(\lambda_n + 1/p)_n$ est quasi-lacunaire, ou $p = 1$.

Démonstration. Pour $p = 1$, on a toujours $\|T_1^\Lambda\| = 1$ sans aucune hypothèse sur Λ (voir Remarque 2.3). Supposons maintenant que $p > 1$ et que Λ est une suite telle que $(\lambda_n + 1/p)$ est quasi-lacunaire. D'après la Proposition 1.22, la suite $(\lambda_n + 1/p)$ est une union finie de suites lacunaires, donc il existe $K \in \mathbb{N}$ et des ensembles $(\Lambda_j)_{j \leq K} \subset \Lambda$ tels que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_K$, et pour tout $j \in \{1, \ldots, K\}$, $(\lambda + 1/p)_{\lambda \in \Lambda_j}$ est lacunaire. On définit les opérateurs

$$T^{(j)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^p(w(p)) & \longrightarrow & M_\Lambda^p \\ b & \longmapsto & \sum\limits_n b_n t^{\lambda_n} \mathbb{1}_{\Lambda_j}(\lambda_n) \end{array} \right.$$

où $\mathbb{1}_{\Lambda_j}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble Λ_j. On a $T_p^\Lambda = \sum\limits_{j=1}^{K} T^{(j)}$. De plus pour tout j, on a

$$\|T^{(j)}\| = \|T_p^{\Lambda_j}\| < +\infty,$$

d'après la Proposition 2.6 et le Corollaire 2.9. Ainsi l'opérateur T_p^Λ est borné.

Pour la réciproque, supposons que la suite $(q_n)_n = (p\lambda_n + 1)_n$ n'est pas quasi-lacunaire. Pour un entier $N \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand, on considère l'extraction $(Nk)_{k \in \mathbb{Z}}$. Elle est à écarts bornés, donc la suite q_{kN} n'est pas lacunaire. Cela entraîne

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{q_{(k+1)N}}{q_{kN}} = 1.$$

Soit $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que cette quantité est plus petite que 2. Pour $n_0 = k_0 N$ on a

$$q_{n_0+N} \leq 2 q_{n_0}.$$

Nous définissons maintenant $A = \{n_0, \ldots, n_0 + N - 1\} \subset \mathbb{Z}$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique on a

$$\|T_p^\Lambda(\mathbb{1}_A)\|_p^p = \int_0^1 \Big| \sum_{j \in A} t^{\lambda_j} \Big|^p dt \geq \int_0^1 N^p \prod_{j \in A} t^{\frac{p\lambda_j}{N}} dt.$$

On obtient alors

$$\|T_p^\Lambda(\mathbb{1}_A)\|_p^p \geq \frac{N^p}{\sum\limits_{j\in A} \frac{q_j}{N}} \geq \frac{N^p}{q_{n_0+N}} \geq \frac{N^p}{2q_{n_0}}\cdot$$

D'autre part, $\|\mathbb{1}_A\|_{\ell^p(w)}^p = \sum\limits_{j\in A} \frac{1}{q_j} \leq \frac{N}{q_{n_0}}\cdot$ Comme N est arbitrairement grand et $p > 1$, l'opérateur T_p^Λ n'est pas borné. □

Remarque 2.11. Dans le cas où $\Lambda = (\lambda_n)_n$ est telle que $(\lambda_n + 1/p)_n$ est quasi-lacunaire, on obtient pour toute fonction $f = \sum\limits_n a_n t^{\lambda_n} \in M_\Lambda^p$,

$$\|f\|_p \lesssim \Big(\sum_n \|a_n t^{\lambda_n}\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

L'inégalité inverse n'est en revanche possible que si $(\lambda_n + 1/p)_n$ est lacunaire.

2.1.2 Estimation asymptotique de $\|T_p^\Lambda\|$, quand $p \to +\infty$

Dans cette partie, nous présentons la démarche initiale que nous avions employée pour calculer la norme l'opérateur T_p^Λ : il s'agit de démontrer une estimation quand p est entier puis d'interpoler. Nous verrons aussi une application de cette démarche. On commence avec le lemme suivant, il est calculatoire mais assez élémentaire.

Lemme 2.12. *Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite r-lacunaire. Alors on a*

$$\sup_{n_p\in\mathbb{Z}} \sum_{n_1,\dots,n_{p-1}\in\mathbb{Z}} p\frac{m_{n_1}m_{n_2}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p + \cdots + m_{n_p}^p} \leq 1 + M(p, r),$$

où la valeur $M(p, r)$ est donnée par la formule

$$M(p, r) = \frac{2p(p-1)(1 + \frac{2}{r-1})^{p-2}}{r-1}\cdot$$

Démonstration. Notons d'abord que lorsque tous les indices n_i sont égaux entre eux, on a

$$p\frac{m_{n_1}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p + \cdots + m_{n_p}^p} = 1.$$

Sinon, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, c'est un nombre strictement plus petit que 1. Soit $n_p \in \mathbb{Z}$. On introduit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{Z}^{p-1}$:

$$S = \mathbb{Z}^{p-1} \setminus \{(n_p, \dots, n_p)\} \quad \text{et} \quad S_k = \{(n_1, \dots, n_{p-1}) \in \mathbb{Z}^{p-1}, n_k \neq n_p\} \ ,$$

pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Comme $S = \bigcup\limits_k S_k$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{(n_i)_i\in\mathbb{Z}^{p-1}} p\frac{m_{n_1}m_{n_2}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p + \cdots + m_{n_p}^p} &= 1 + \sum_{(n_i)_i\in S} p\frac{m_{n_1}m_{n_2}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p + \cdots + m_{n_p}^p} \\ &\leq 1 + p\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{(n_i)_i\in S_k} \frac{m_{n_1}m_{n_2}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p + \cdots + m_{n_p}^p} \\ &= 1 + p(p-1)\sum_{(n_i)_i\in S_{p-1}} \frac{m_{n_1}m_{n_2}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p + \cdots + m_{n_p}^p},\end{aligned}$$

car par symétrie, l'expression $\displaystyle\sum_{(n_i)_i\in S_k} \frac{m_{n_1}m_{n_2}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p+\cdots+m_{n_p}^p}$ ne dépend pas de k. Pour estimer les termes de cette dernière expression, nous commencerons par démontrer l'hypothèse de récurrence suivante pour $k\in\{1,\ldots,p-3\}$:

$$\sum_{\substack{n_k,\ldots,n_{p-1}\in\mathbb{Z}\\ n_{p-1}\neq n_p}} \frac{m_{n_k}^k\cdots m_{n_p}}{m_{n_k}^p+\cdots+m_{n_p}^p} \le (1+\frac{2}{r-1}) \sum_{\substack{n_{k+1},\ldots,n_{p-1}\in\mathbb{Z}\\ n_{p-1}\neq n_p}} \frac{m_{n_{k+1}}^{k+1}\cdots m_{n_p}}{m_{n_{k+1}}^p+\cdots+m_{n_p}^p}.$$

Nous calculons la somme sur les deux premières variables n_k et n_{k+1}, en considérant que les variables $n_{k+2},\ldots,n_{p-1}$ sont fixées :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_k,n_{k+1}} \frac{m_{n_k}^k m_{n_{k+1}}}{m_{n_k}^p+\cdots+m_{n_p}^p}\\
&\quad= \sum_{\substack{n_{k+1},n_k\\ n_k<n_{k+1}}} \frac{m_{n_k}^k m_{n_{k+1}}}{m_{n_k}^p+\cdots+m_{n_p}^p} + \sum_{n_{k+1}=0}^{+\infty} \frac{m_{n_{k+1}}^{k+1}}{m_{n_k}^p+\cdots+m_{n_p}^p} + \sum_{\substack{n_{k+1},n_k\\ n_k>n_{k+1}}} \frac{m_{n_k}^k m_{n_{k+1}}}{m_{n_k}^p+\cdots+m_{n_p}^p}\\
&\quad\le \sum_{n_{k+1}} \frac{m_{n_{k+1}}^{k+1} + \sum_{n_k<n_{k+1}} (m_{n_k}^k m_{n_{k+1}} + m_{n_{k+1}}^k m_{n_k})}{m_{n_{k+1}}^p+\cdots+m_{n_p}^p}\\
&\quad\le \sum_{n_{k+1}} \frac{\Big(1+\dfrac{2}{r-1}\Big) m_{n_{k+1}}^{k+1}}{m_{n_{k+1}}^p+\cdots+m_{n_p}^p} \quad ,
\end{aligned}$$

car la suite $(m_n)_n$ étant r-lacunaire, on a d'une part

$$\sum_{n_k=-\infty}^{n_{k+1}-1} m_{n_k} m_{n_{k+1}}^k \le \Big(\frac{1}{r-1}\Big) m_{n_{k+1}}^{k+1} \quad ,$$

ainsi que

$$\sum_{n_k=-\infty}^{n_{k+1}-1} m_{n_k}^k m_{n_{k+1}} \le \Big(\frac{1}{r^k-1}\Big) m_{n_{k+1}}^{k+1} \le \Big(\frac{1}{r-1}\Big) m_{n_{k+1}}^{k+1} \quad .$$

Alors la formule de récurrence est bien démontrée. Pour $k=p-2$, on peut encore appliquer la formule de récurrence en faisant attention de ne pas compter le terme diagonal $n_{p-1}=n_p$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{p-1}\in\mathbb{Z}\\ n_{p-1}\neq n_p}} \frac{m_{n_1}m_{n_2}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p+\cdots+m_{n_p}^p} &\le \Big(1+\frac{2}{r-1}\Big)^{p-2} \sum_{\substack{n_{p-1}=0\\ n_{p-1}\neq n_p}}^{\infty} \frac{m_{n_{p-1}}^{p-1} m_{n_p}}{m_{n_{p-1}}^p+m_{n_p}^p}\\
&\le \Big(1+\frac{2}{r-1}\Big)^{p-2} \frac{2}{r-1} \quad ,
\end{aligned}$$

en appliquant la même technique que dans la preuve de la formule de récurrence mais sans le terme "diagonal", et la preuve du lemme est terminée. □

Proposition 2.13. *Soit $p\in\mathbb{N}$ avec $p\ge 2$ et soit $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite telle que $(\lambda_n+1/p)_n$ est r-lacunaire. Alors on a*

$$\forall a\in c_{00},\quad \Big\|\sum_n a_n t^{\lambda_n}\Big\|_p \le \Big(1+M(p,r^{\frac{1}{p}})\Big)^{\frac{1}{p}} \|a\|_{\ell^p(w(p))},$$

où $M(p,r^{\frac{1}{p}})$ est définie comme dans le Lemme 2.12.

Démonstration. Comme p est entier, nous allons estimer la norme du polynôme $\sum_n a_n t^{\lambda_n}$ en développant la puissance p. Pour $j \in \mathbb{Z}$ nous noterons $m_j = (p\lambda_j + 1)^{\frac{1}{p}}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^{\lambda_n}\Big|^p &\leq \int_0^1 \sum_{n_1,\dots,n_p\in\mathbb{Z}} |a_{n_1}|\cdots|a_{n_p}| t^{\lambda_{n_1}+\cdots+\lambda_{n_p}} dt \\
&\leq \sum_{n_1,\dots,n_p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{p}\Big(\frac{|a_{n_1}|^p}{m_{n_1}^p} + \cdots + \frac{|a_{n_p}|^p}{m_{n_p}^p}\Big) m_{n_1}\cdots m_{n_p} \int_0^1 t^{\lambda_{n_1}+\cdots+\lambda_{n_p}},
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité scalaire

$$|a_{n_1}|\cdots|a_{n_p}| = \Big|\prod_{j=1}^p \frac{a_{n_j}}{m_{n_j}}\Big| m_{n_1}\cdots m_{n_p} \leq \frac{1}{p}\Big(\sum_{j=1}^p \frac{|a_{n_j}|^p}{m_{n_j}^p}\Big) m_{n_1}\cdots m_{n_p}.$$

En utilisant la symétrie des expressions, puis en calculant l'intégrale on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_n a_n t^{\lambda_n}\Big\|_p^p &\leq \sum_{n_p} \frac{|a_{n_p}|^p}{p\lambda_{n_p}+1} \sum_{n_1,\dots,n_{p-1}} m_{n_1}\cdots m_{n_p} \int_{[0,1]} t^{\lambda_{n_1}+\cdots+\lambda_{n_{p-1}}+\lambda_{n_p}} dt \\
&= \sum_{n_p} \frac{|a_{n_p}|^p}{p\lambda_{n_p}+1} \sum_{n_1,\dots,n_{p-1}} p\frac{m_{n_1}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p + \cdots + m_{n_p}^p} \\
&\leq \|a\|_{\ell^p(w(p))} \sup_{n_p\in\mathbb{Z}} \sum_{n_1,\dots,n_{p-1}} p\frac{m_{n_1}\cdots m_{n_p}}{m_{n_1}^p + \cdots + m_{n_p}^p}.
\end{aligned}$$

La suite $(m_n)_n$ est $r^{\frac{1}{p}}$-lacunaire par hypothèse, donc le Lemme 2.12 entraîne :

$$\|T_p^\Lambda\| \leq \left(1 + \frac{2p(p-1)\big(1+\frac{2}{r^{1/p}-1}\big)^{p-2}}{r^{1/p}-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Corollaire 2.14. *Soit $p \in [1,+\infty)$ et Λ tel que $(\lambda_n + \frac{1}{p})_n$ est r-lacunaire. Alors on a*

$$\|T_p^\Lambda\| \leq \Big(1 + M(q, r^{\frac{1}{q}})\Big)^{\theta/q},$$

où $q = [p]+1$ et $\theta = \dfrac{q'}{p'} \in (0,1)$.

Démonstration. D'après la Remarque 2.3, pour toute suite $\Psi = (\psi_n)_n$ telle que $(\psi_n + 1)_n$ est r-lacunaire, on a $\|T_1^\Psi\| \leq 1$. D'autre part d'après la Proposition 2.13 pour toute suite $\Phi = (\phi_n)_n$ telle que $(\phi_n + 1/q)_n$ est r-lacunaire, on a

$$\|T_q^\Phi\| \leq \big(1 + M(q, r^{\frac{1}{q}})\big)^{\frac{1}{q}}.$$

D'après le Théorème d'interpolation 2.8 on obtient la borne voulue pour $\|T_p^\Lambda\|$ car pour $\theta = \frac{q'}{p'}$, on a bien $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q}$. □

Remarque 2.15. Avec la borne donnée par le Corollaire 2.14, on peut aussi obtenir les estimations du Théorème 2.25 si Λ est r-lacunaire et r est grand. De plus, en comparant les quantités :

$$\left(1 + \frac{2q(q-1)}{r^{\frac{1}{q}}-1}\Big(1 + \frac{2}{r^{\frac{1}{q}}-1}\Big)^{q-2}\right)^{\theta/q} \quad \text{et} \quad \Big(1 + \frac{2(p')^{\frac{1}{p-1}}}{r^{\frac{1}{p(p-1)}}-1}\Big)^{\frac{1}{p'}},$$

où $q = [p]+1$, on remarque que l'expression de gauche a un meilleur comportement quand $p \to +\infty$ et r est fixé. C'est cette propriété que nous allons mettre en valeur dans le prochain théorème, comme application du Corollaire 2.14.

Si une suite Λ satisfait le critère de Müntz dans L^p et dans L^q avec $p \neq q$, alors Λ n'a que $+\infty$ comme valeur d'adhérence d'après le Théorème 2.10. Pour cette raison, les prochains résultats seront formulés uniquement pour des suites de la forme $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ strictement croissantes. On s'intéresse au comportement de la norme de T_p^Λ quand $p \to +\infty$.

Théorème 2.16. *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante.*

1) Si Λ est quasi-lacunaire, alors il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall p \in [1, +\infty), \quad \|T_p^\Lambda\| \leq C_2 p.$$

2) Si Λ est sous-géométrique, alors il existe une constante $C_1 \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall p \in [1, +\infty), \quad \|T_p^\Lambda\| \geq C_1 p.$$

Démonstration. Soit Λ une suite quasi-lacunaire, d'après la Proposition 1.22 on peut l'écrire comme l'union de K ensembles lacunaires $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_K$. Comme on a $T_p^\Lambda = \sum_{j=1}^K T_p^{\Lambda_j}$, le Corollaire 2.14, nous donne l'estimation

$$\|T_p^\Lambda\| \leq K \max_j \|T_p^{\Lambda_j}\| \leq K\Big(1 + M(q, r^{\frac{1}{q}})\Big)^{\frac{\theta}{q}},$$

où r est le plus petit indice de lacunarité des suites $(\lambda + 1/q)_{\lambda\in\Lambda_j}$. Nous allons maintenant estimer cette dernière quantité : grâce à l'inégalité de convexité $\exp(u) - 1 \geq u$, on a d'une part

$$\frac{1}{r^{1/q} - 1} \leq \frac{q}{\log r},$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
\|T_p^\Lambda\| &\leq K\Big(1 + \frac{2q(q-1)}{r^{\frac{1}{q}} - 1}\Big(1 + \frac{2}{r^{\frac{1}{q}} - 1}\Big)^{q-2}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big(3q^2.\frac{q}{\log r}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{3q}{\log r}\Big)^{1-\frac{2}{q}} \\
&\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{3p}{\log r}.
\end{aligned}$$

Nous allons désormais démontrer le point 2). Supposons que Λ est sous-géométrique et notons $M = \sup\limits_n \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\cdot$ Soit $p \in [1, +\infty)$ grand, et soit $q = [p] + 1 \in \mathbb{N}$, on considère la suite finie $b^{(q)} = \mathbb{1}_{\{1,\ldots,q\}}$. On a d'une part :

$$\|b^{(q)}\|_{\ell^p(w(p))} = \Big(\sum_{j=0}^q \frac{1}{p\lambda_j + 1}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\frac{q+1}{p\lambda_0 + 1}\Big)^{\frac{1}{p}} \to 1 \quad ,$$

quand $p \to +\infty$. D'autre part l'inégalité arithmético-géométrique nous donne :

$$\begin{aligned}
\|T^\Lambda(b^{(q)})\|_p &= \Big(\int_0^1 \Big|\sum_{j=1}^q t^{\lambda_j}\Big|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \Big(\int_0^1 \Big|q\prod_{j=1}^q t^{\frac{\lambda_j}{q}}\Big|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= q\left(\frac{1}{\Big(\sum\limits_{j=1}^q \frac{p\lambda_j}{q}\Big) + 1}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Comme Λ est sous-géométrique on a

$$1+\sum_{j=0}^{q}\frac{p\lambda_j}{q}\leq 1+\lambda_0\sum_{j=0}^{q}M^j\leq 1+\frac{\lambda_0 M^q}{M-1}\cdot$$

On obtient finalement :

$$\|T_p^\Lambda(b^{(q)})\|_p\geq \frac{q}{M^{\frac{q}{p}}}\left(\frac{1}{M^{-q}+\frac{\lambda_0}{M-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{p}{M}\cdot$$

Donc pour p assez grand, T_p^Λ satisfait $\|T_p^\Lambda\|\geq \dfrac{p}{M+1}$ et on obtient le point 2). $\square$

2.2 Ensembles lacunaires avec un grand indice

Dans cette partie, nous allons raffiner la majoration et la minoration du théorème de Gurariy-Macaev dans M^p_Λ lorsque Λ est lacunaire et r est suffisamment grand. Nous employons trois différentes méthodes pour traiter les cas $p=1$, $p \in (1,+\infty)$ et $p=+\infty$. Nous définissons tout d'abord les notions suivantes pour des familles de vecteurs :

Définition 2.17. Soient X, Y deux espaces de Banach et $x=(x_n)_n \in X$, $y=(y_n) \in Y$ deux suites de vecteurs. Définissons les espaces S_x et S_y suivants :

$$S_x = \mathrm{Adh}(Span\{x_n, n \in \mathbb{N}\}, \| \, . \, \|_X) \quad \text{et} \quad S_y = \mathrm{Adh}(Span\{y_n, n \in \mathbb{N}\}, \| \, . \, \|_Y).$$

Pour $\varepsilon > 0$, nous dirons que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont $(1+\varepsilon)$-*isométriques* si il existe un opérateur $T : S_x \to S_y$ tel que

(a) T est borné et inversible ;

(b) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $T(x_n) = y_n$;

(c) $\|T\| \geq 1$, $\|T^{-1}\| \geq 1$, et $\|T\|.\|T^{-1}\| \leq (1+\varepsilon)$.

Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont $(1+\varepsilon)$-isométriques, alors la distance entre Banach-Mazur entre S_x et S_y est inférieure à $(1+\varepsilon)$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit les suite tronquées $x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $y^{(m)} = (y_n^{(m)})_{n\in\mathbb{Z}}$ de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} x_n & \text{si } |n| \geq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad y_n^{(m)} = \begin{cases} y_n & \text{si } |n| \geq m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous dirons que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont *presque isométriques* si pour tout $\delta > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^{(m)}$ et $y^{(m)}$ sont $(1+\delta)$-isométriques.

Exemple 2.18. Si une suite $(x_n)_n \in X$ est $(1+\varepsilon)$-isométrique à la base canonique de ℓ^p, alors il existe $A \in (0,1]$ et $B \in [1,+\infty)$ tels que :

$$\forall a \in c_{00}, \quad A\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x_n\right\|_X \leq B\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

et $B/A \leq 1+\varepsilon$. La suite $(x_n)_n$ est presque isométrique à la base canonique de ℓ^p si et seulement si il existe une suite $(\varepsilon_N)_{N\geq 0} \in \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 quand $N \to +\infty$ telle que pour toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_{00}$, on a

$$(1-\varepsilon_N)\left(\sum_{|n|\geq N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\sum_{|n|\geq N} a_n x_n\right\| \leq (1+\varepsilon_N)\left(\sum_{|n|\geq N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De même si une suite $(y_n) \in Y$ est $(1+\varepsilon)$-isométrique à la base sommante de c alors il existe $A' \in (0,1]$ et $B' \in [1,+\infty)$ tels que :

$$\forall a \in c_{00}, \quad A' \sup_N \left|\sum_{n=-\infty}^{N} a_n\right| \leq \left\|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n y_n\right\|_Y \leq B' \sup_N \left|\sum_{n=-\infty}^{N} a_n\right|,$$

et $B'/A' \leq 1+\varepsilon$. La suite $(y_n)_n$ est presque isométrique à la base sommante $(f_n)_n$ de c si et seulement si il existe une suite $(\varepsilon_N) \in \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 telle que : pour toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_{00}$, on a

$$(1-\varepsilon_N)\left\|\sum_{|n|\geq N} a_n f_n\right\|_{\ell^\infty} \leq \left\|\sum_{|n|\geq N} a_n y_n\right\| \leq (1+\varepsilon_N)\left\|\sum_{|n|\geq N} a_n f_n\right\|_{\ell^\infty}.$$

En posant $A_p^q = \sum_{n=p}^q a_n$ pour $p \leq q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a l'expression suivante :

$$\left\|\sum_{|n|\geq N} a_n f_n\right\|_{\ell^\infty} = \max\left\{\sup_{k\leq -N} A_{-\infty}^k \;,\; \sup_{k\geq N} A_{-\infty}^{-N} + A_N^k\right\}.$$

2.2.1 Quand M_Λ^1 est $(1+\varepsilon)$-isométrique à ℓ^1

Nous commençons par la preuve du cas $p=1$. Elle est inspirée de la technique de V. Gurariy et V. Macaev de 1966, et un peu plus facile.

Théorème 2.19. *Soit $w(1)=(w_n(1))_n=(\lambda_n+1)^{-1}$. Alors pour tout $\varepsilon\in(0,1)$, il existe $r_\varepsilon>1$ avec la propriété suivante :*
Pour toute suite $\Lambda=(\lambda_n)_n$ telle que $(\lambda_n+1)_n$ est au moins r_ε-lacunaire, on a

$$\forall b\in c_{00},\qquad (1-\varepsilon)\|b\|_{\ell^1(w(1))}\le\|T_1^\Lambda(b)\|_1\le\|b\|_{\ell^1(w(1))},$$

où T_1^Λ est l'opérateur de la Définition 2.2.

Remarque 2.20. L'indice $r_\varepsilon=1+\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$ convient pour garantir 2.19.

Démonstration. Soit $r\ge r_\varepsilon$ comme dans la remarque et Λ une suite telle que $(\lambda_n+1)_n$ est r-lacunaire. Soit $b=(b_n)_n\in c_{00}$. Comme on l'a déjà remarqué précédemment, la majoration est triviale :

$$\begin{aligned}\|T_1^\Lambda(b)\|_1&=\int_{(0,1)}\Big|\sum_j b_jt^{\lambda_j}\Big|dt\\&\le\sum_j|b_j|\int_{[0,1]}t^{\lambda_j}\,dt=\sum_j\frac{|b_j|}{\lambda_j+1}\\&=\|b\|_{\ell^1(w(1))}.\end{aligned}$$

Pour la minoration, on définit les intervalles $I_k=(\alpha_k,\beta_k)$ avec :

$$\alpha_k=\exp(-\frac{\sqrt{r}}{\lambda_k+1})\quad\text{et}\quad\beta_k=\exp(-\frac{1}{\sqrt{r}(\lambda_k+1)}).$$

Comme la fonction $t\mapsto\exp(-\frac{1}{t})$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ vers $(0,1)$, et comme la suite $(\lambda_n+1)_n$ est r-lacunaire, on a pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

$$0\le\cdots\le\alpha_k<\beta_k\le\alpha_{k+1}<\beta_{k+1}\le\cdots\le1$$

et donc les intervalles I_k sont disjoints. On procède à un découpage de $(0,1)$:

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}b_jt^{\lambda_j}\Big\|_1&=\int_0^1\Big|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}b_jt^{\lambda_j}\Big|dt\\&\ge\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{I_k}\Big|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}b_jt^{\lambda_j}\Big|dt\\&\ge\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|b_k|\int_{I_k}t^{\lambda_k}\,dt-\left(\sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}\\ j\ne k}}|b_j|\int_{I_k}t^{\lambda_j}\,dt\right)\ .\end{aligned}$$

Et maintenant grâce au bon choix des intervalles I_k, et comme r est suffisamment grand, on va montrer que cette dernière quantité est très proche de $\sum_k\frac{|b_k|}{\lambda_k+1}$. D'une part, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_{I_k}t^{\lambda_k}\,dt&=\frac{1}{\lambda_k+1}\Big(\beta_k^{\lambda_k+1}-\alpha_k^{\lambda_k+1}\Big)\\&=\frac{1}{\lambda_k+1}\Big(e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}}-e^{-\sqrt{r}}\Big)\\&\ge\frac{1}{\lambda_k+1}\Big((1-\frac{1}{\sqrt{r}})-\frac{1}{\sqrt{r}}\Big)\\&\ge\frac{1}{\lambda_k+1}\Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\quad,\end{aligned}$$

d'après la convexité de la fonction $u \mapsto \exp(-u)$, et d'après $\exp(-u) \leq \frac{1}{u}\cdot$ Comme $r \geq \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$, on a l'inégalité voulue : en sommant sur les k's, on obtient :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k| \int_{I_k} t^{\lambda_k}\, dt \geq \|b\|_{\ell^1(w(1))}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

D'autre part pour $j \neq k$ on a

$$\begin{aligned}\int_{I_k} t^{\lambda_j}\, dt &= \frac{1}{\lambda_j+1}\left(\beta_k^{\lambda_j+1}-\alpha_k^{\lambda_j+1}\right)\\ &= \frac{1}{\lambda_j+1}\left(e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}}-e^{-\sqrt{r}\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}}\right)\end{aligned}$$

On traite d'abord le cas $j > k$. En appliquant $\exp(-t) \leq \frac{1}{t}$ et en utilisant que la suite $(\lambda_n+1)_n$ est r-lacunaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}\\ j>k}} |b_j| \int_{I_k} t^{\lambda_j}\, dt\right) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|b_j|}{\lambda_j+1}\sum_{k=-\infty}^{j-1}\left(e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}}-e^{-\sqrt{r}\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}}\right)\\ &\leq \|b\|_{\ell^1(w(1))}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=-\infty}^{j-1} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}}\\ &\leq \|b\|_{\ell^1(w(1))}\sup_{j}\sum_{k=-\infty}^{j-1}\sqrt{r}\frac{\lambda_k+1}{\lambda_j+1}\\ &\leq \|b\|_{\ell^1(w(1))}\sum_{k=-\infty}^{j-1}\frac{\sqrt{r}}{r^{j-k}}\\ &\leq \frac{\|b\|_{\ell^1(w(1))}\sqrt{r}}{r-1}\\ &\leq \|b\|_{\ell^1(w(1))}\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

On traite maintenant les termes $j < k$. Cette fois, on va utiliser une estimation intégrale de $\beta_k^{\lambda_j+1}-\alpha_k^{\lambda_j+1}$. Le calcul commence comme dans le cas précédent :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}\\ j<k}} |b_j| \int_{I_k} t^{\lambda_j}\, dt\right) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|b_j|}{\lambda_j+1}\sum_{k=j+1}^{+\infty}\left(e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}}-e^{-\sqrt{r}\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}}\right)\\ &\leq \|b\|_{\ell^1(w(1))}\sup_{j}\sum_{k=j+1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\sqrt{r}}\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}\exp(-\frac{\lambda_j+1}{\lambda_k+1}u)du\\ &\leq \|b\|_{\ell^1(w(1))}\sup_{j}\sum_{k=j+1}^{+\infty}\frac{\sqrt{r}-\frac{1}{\sqrt{r}}}{r^{k-j}}\\ &\leq \frac{\|b\|_{\ell^1(w(1))}\sqrt{r}}{r-1}\\ &\leq \|b\|_{\ell^1(w(1))}\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j t^{\lambda_j} \Big\|_1 &\geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |b_k| \int_{I_k} t^{\lambda_k} dt - \Bigg(\sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z} \\ j\neq k}} |b_j| \int_{I_k} t^{\lambda_j} dt \Bigg) \\ &\geq \|b\|_{\ell^1(w)} \Big(1 - \frac{\varepsilon}{2} - 2\frac{\varepsilon}{4}\Big) \\ &= \|b\|_{\ell^1(w(1))}(1-\varepsilon) \quad \cdot\end{aligned}$$

□

Avec les notations du théorème original de Gurariy-Macaev, on a

Corollaire 2.21. *Soit $\varepsilon \in (0,1)$. Alors il existe $r'_\varepsilon > 1$ tel que pour toute suite Λ telle que $(\lambda_n+1)_n$ est r'_ε-lacunaire, la famille normalisée $\left(\frac{t^{\lambda_n}}{\|t^{\lambda_n}\|_1}\right)_n \in M^1_\Lambda$ est $(1+\varepsilon)$-isométrique à la base canonique de ℓ^1 (voir la Définition 2.17).*

Démonstration. Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in M^1_\Lambda$ la famille normalisée définie par $g_n(t) = (\lambda_n+1)t^{\lambda_n}$. On définit $S : \ell^1 \to M^1_\Lambda$ par $S(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_n$ pour tout $a = (a_n)_n \in \ell^1$. L'application $I_1 : \ell^1 \to \ell^1(w(1))$ définie par $I_1(a) = (a_n w_n(1)^{-1})_n$ est une isométrie. Comme $w_n(1)^{-1} = \lambda_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $S = T^\Lambda_1 \circ I_1$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le Théorème 2.19 si $(\lambda_n+1)_n$ est au moins $r_{\varepsilon/2}$-lacunaire alors S satisfait :

$$\forall a \in \ell^1, \quad (1-\varepsilon/2)\|a\|_{\ell^1} \leq \|S(a)\|_1 \leq \|a\|_{\ell^1},$$

donc $\|S\| \leq 1$ et $\|S^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\varepsilon/2} \leq (1+\varepsilon)$. □

Remarque 2.22. Dans la preuve du Théorème 2.19, on se base sur la même méthode que V. Gurariy et V. Macaev dans leur preuve originale du Théorème 1.26, il s'agit de déterminer des intervalles disjoints $(I_k)_k \subset (0,1)$ sur lesquels se concentrent les fonctions $(t^{\lambda_k})_k$ grâce à la lacunarité de $(\lambda_n + 1/p)_n$. La preuve du théorème de Gurariy-Macaev requiert un argument supplémentaire pour la minoration si l'indice de lacunarité n'est pas assez grand. Nous avons illustré ce phénomène pour pouvoir visualiser les intervalles I_k.

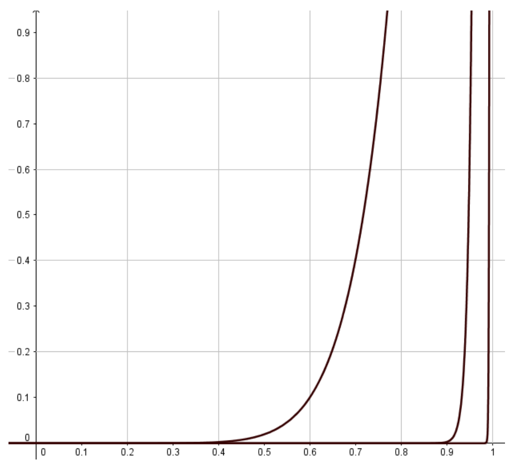

Figure 2.1 – Fonctions $(\mu+1)t^\mu$, $\mu \in \{9, 99, 999\}$.

Le même phénomène de concentration se produit du côté gauche pour les fonctions $(\mu+1)t^\mu$ quand μ est proche de -1.

Lemme 2.23. *Soient $\lambda, \lambda' \in (-1, +\infty)$ avec $\lambda \neq \lambda'$. On note $g_\lambda, g'_\lambda \in M^1_\Lambda$ les monômes normalisés définis par $g_\lambda(t) = (\lambda+1)t^\lambda$ et $g_{\lambda'}(t) = (\lambda'+1)t^{\lambda'}$. Alors on a*

$$\|g_\lambda - g_{\lambda'}\|_1 = 2\big(\frac{1}{\alpha}\big)^{\frac{1}{\alpha-1}}\Big|1 - \frac{1}{\alpha}\Big|,$$

où α est le rapport $\alpha = \dfrac{\lambda'+1}{\lambda+1}\cdot$

Démonstration. Comme la fonction $\alpha \mapsto 2(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}|1-\frac{1}{\alpha}|$ est invariante en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$, on peut supposer que $\lambda' > \lambda$. Alors on a

$$\begin{aligned}\big\|(\lambda+1)t^\lambda - (\lambda'+1)t^{\lambda'}\big\|_1 &= \int_0^1 \Big|1 - \frac{(\lambda'+1)}{(\lambda+1)}t^{\lambda'-\lambda}\Big|(\lambda+1)t^\lambda dt\\ &= \int_0^1 \Big|1 - \alpha u^{\frac{\lambda'+1}{\lambda+1}-1})\Big|du\\ &= \int_0^1 \Big|1 - \alpha u^{\alpha-1})\Big|du,\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = t^{\lambda+1}$. La fonction $u \mapsto (1-\alpha u^{\alpha-1})$ change une fois de signe au point $b = \big(\frac{1}{\alpha}\big)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ et on a donc :

$$\begin{aligned}\|g_\lambda - g_{\lambda'}\|_1 &= \int_0^b \big(1-\alpha u^{\alpha-1}\big)du + \int_b^1 \big(\alpha u^{\alpha-1} - 1\big)du\\ &= (b - b^\alpha) - (b^\alpha - b)\\ &= 2b(1-b^{\alpha-1})\\ &= 2\big(\frac{1}{\alpha}\big)^{\frac{1}{\alpha-1}}\big(1-\frac{1}{\alpha}\big).\end{aligned}$$

□

Théorème 2.24. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *La suite Λ satisfait $\displaystyle\lim_{|n|\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}+1}{\lambda_n+1} = +\infty$;*

(*ii*) *La famille $\Big(\dfrac{t^{\lambda_n}}{\|t^{\lambda_n}\|_1}\Big)_n \in L^1$ est presque isométrique à la base canonique de ℓ^1.*

Démonstration. Supposons que Λ satisfait la condition (i). Fixons $\delta > 0$ et considérons le nombre $r'_\delta > 1$ donné par le Corollaire 2.21. D'après (i), il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda_{n+1} + 1 \geq r'_\delta(\lambda_n + 1),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq m$. Nous définissons désormais la suite $(\psi_n)_n$ par : $\psi_0 = \lambda_0$, $\psi_n = \lambda_{n+m}$ et $\psi_{-n} = \lambda_{-n-m}$ pour $n > 0$. Alors la suite $(\psi_n+1)_n$ est au moins r'_δ lacunaire et d'après le Corollaire 2.21, la famille tronquée $\big((\psi_n+1)t^{\psi_n}\big)_n \in L^1$ est $(1+\delta)$-isométrique à la base canonique de ℓ^1 qui est elle même isométrique à la base canonique tronquée, donc on obtient (ii).
Réciproquement, soit Λ une suite telle que la famille $\big((\lambda_n+1)t^{\lambda_n}\big)_n$ est presque isométrique à la base canonique de ℓ^1. Alors pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que pour tout n satisfaisant $|n| \geq m$ on a

$$\|g_n - g_{n+1}\|_1 \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\|e_n - e_{n+1}\|_{\ell^1} \geq 2(1-\varepsilon).$$

D'après le Lemme 2.23, on a :

$$\|g_n - g_{n+1}\| \leq 2\big(1 - \frac{\lambda_n+1}{\lambda_{n+1}+1}\big),$$

et on obtient donc $\dfrac{\lambda_{n+1}+1}{\lambda_n+1} \geq \dfrac{1}{\varepsilon}\cdot$ □

2.2.2 Quand M^p_Λ est $(1+\varepsilon)$-isométrique à ℓ^p, avec $p \in (1,+\infty)$

Nous allons maintenant utiliser les résultats du début du chapitre afin d'étendre le Théorème 2.19 au cas $p \in (1,+\infty)$.

Théorème 2.25. *Soit $p \in (1,+\infty)$ et $w(p) = (w_n(p))_n$ la suite de poids définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par $w_n(p) = (p\lambda_n + 1)^{-1}$. Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe un indice $r_\varepsilon > 1$ avec la propriété suivante :*

Pour toute suite Λ telle que $(\lambda_n + 1/p)_n$ est au moins r_ε-lacunaire, on a :

$$\forall a \in \ell^p(w), \qquad (1-\varepsilon)\|a\|_{\ell^p(w(p))} \leq \|T^\Lambda_p(a)\|_p \leq (1+\varepsilon)\|a\|_{\ell^p(w(p))}.$$

Remarque 2.26. La preuve du Théorème 2.25 montre que l'indice $r_\varepsilon = \Big(1 + \dfrac{4q}{\varepsilon}\Big)^{q(q-1)}$ avec $q = \max\{p, p'\}$, est suffisamment grand pour obtenir la conclusion.

Démonstration. Soit $q = \max\{p,p'\} \geq 2$ et $r_\varepsilon = \Big(1 + \dfrac{4q}{\varepsilon}\Big)^{q(q-1)}$. On fixe une suite $a \in c_{00}$ telle que $\|a\|_{\ell^p(w(p))} = 1$. Si $p \geq 2$, on a $q = p$ et la Proposition 2.6 entraîne :

$$\|T^\Lambda_p\| \leq \Big(1 + \frac{2(p')^{\frac{1}{p-1}}}{r_\varepsilon^{\frac{1}{p(p-1)}} - 1}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'après le choix de r_ε. Si $p < 2$ c'est le Corollaire 2.9 qui nous donne :

$$\|T^\Lambda_p\| \leq \Big(1 + \frac{4}{r_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - 1}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

car $q(q-1) \geq 2$ et $q \geq 2$. Dans tous les cas, on obtient la majoration. Nous allons maintenant démontrer la minoration grâce à la majoration de $\|T^\Psi_{p'}\|$ et un argument de dualité, pour une suite Ψ bien choisie. Soit $b \in c_{00}$ telle que

$$\|b\|_{\ell^{p'}(w(p))} = \Big(\sum_n \frac{|b_n|^{p'}}{p\lambda_n + 1}\Big)^{\frac{1}{p'}} = 1.$$

Soit $\Psi = (\psi_n)_n$ la suite définie par $\psi_n = \dfrac{p\lambda_n}{p'} = (p-1)\lambda_n$. On a :

$$\begin{aligned}
\|T^\Lambda(a).T^\Psi(b)\|_1 &= \int_0^1 \Big|\sum_{n,k} a_n b_k t^{\lambda_n + (p-1)\lambda_k}\Big| dt \\
&\geq \Big|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n b_n}{p\lambda_n + 1}\Big| - \sum_{\substack{n,k\in\mathbb{Z}\\ k\neq n}} \frac{|a_n|.|b_k|}{\lambda_n + (p-1)\lambda_k + 1} \\
&= \Big|\sum_n a_n b_n w_n(p)\Big| - \sum_{\substack{n,k\in\mathbb{Z}\\ k\neq n}} \frac{|a_n|.|b_k|}{\frac{q_n}{p} + \frac{q_k}{p'}} \quad ,
\end{aligned}$$

avec la notation $(q_n)_n = (p\lambda_n + 1)_n = (w_n(p)^{-1})_n$. Comme $\big(\ell^p(w(p))\big)^* = \ell^{p'}(w(p))$, on a

$$\sup\Big\{\Big|\sum_n a_n b_n w_n(p)\Big|, b \in B_{\ell^{p'}(w(p))}\Big\} = \|a\|_{\ell^p(w(p))} = 1.$$

On va majorer le second terme. Pour tous n,k, l'inégalité de Young donne :

$$\begin{aligned}
|a_n b_k| &= |a_n w_n(p)^{\frac{1}{p}} b_k w_k(p)^{\frac{1}{p'}}| \times q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \Big(\frac{1}{p}|a_n|^p w_n(p) + \frac{1}{p'}|b_k|^{p'} w_k(p)\Big) \times q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}} \quad .
\end{aligned}$$

En sommant sur les n et les k on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n,k\in\mathbb{Z}\\k\neq n}} \frac{|a_n|.|b_k|}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|a_n|^p w_n(p)}{p} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq n}} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|b_k|^{p'} w_k(p)}{p'} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq k}} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} \\
&\leq \frac{1}{p}\|a\|^p_{\ell^p(w(p))} \sup_n \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq n}} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} + \frac{1}{p'}\|b\|^{p'}_{\ell^{p'}(w(p))} \sup_k \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq k}} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} \\
&= \frac{1}{p} \sup_n \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq n}} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} + \frac{1}{p'} \sup_k \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq k}} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} \quad ,
\end{aligned}$$

car $\|a\|_{\ell^p(w(p))} = \|b\|_{\ell^{p'}(w(p))} = 1$. Comme la suite $(q_n)_n$ est r_ε-lacunaire, et en gardant uniquement les plus grands termes du dénominateur, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq n}} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} &\leq p \sum_{k=-\infty}^{n-1} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{q_n} + p' \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{q_k} \\
&\leq p \sum_{k=-\infty}^{n-1} \Big(\frac{q_k}{q_n}\Big)^{\frac{1}{p'}} + p' \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{q_n}{q_k}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq p \sum_{k=-\infty}^{n-1} \Big(\frac{1}{r_\varepsilon^{n-k}}\Big)^{\frac{1}{p'}} + p' \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{r_\varepsilon^{k-n}}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{p}{r_\varepsilon^{\frac{1}{p'}}-1} + \frac{p'}{r_\varepsilon^{\frac{1}{p}}-1} \\
&\leq \frac{2q}{r_\varepsilon^{\frac{1}{q}}-1} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ,
\end{aligned}$$

grâce au choix de r_ε. Par le même calcul, on obtient $\sup_k \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\n\neq k}} \frac{q_n^{\frac{1}{p}} q_k^{\frac{1}{p'}}}{\frac{q_n}{p}+\frac{q_k}{p'}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où on a :

$$\forall b \in B_{\ell^{p'}(w(p))}, \qquad \|T^\Lambda(a)T^\Psi(b)\|_1 \geq \Big|\sum_n a_n b_n w_n(p)\Big| - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

D'autre part, comme $p'\psi_n = p\lambda_n$ pour tout n, la suite $(\psi_n + 1/p')_n$ est aussi une suite r_ε-lacunaire. D'après la majoration de $\|T^\Psi_{p'}\|$ donnée par le début de la preuve, on a :

$$\begin{aligned}
\|T^\Psi_{p'}(b)\|_{p'} &\leq \big(1+\frac{\varepsilon}{2}\big)\Big(\sum_n \frac{|b_n|^{p'}}{p'\psi_n+1}\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \big(1+\frac{\varepsilon}{2}\big)\Big(\sum_n \frac{|b_n|^{p'}}{p\lambda_n+1}\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \big(1+\frac{\varepsilon}{2}\big)\cdot
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\|T^\Lambda(a)T^\Psi(b)\|_{L^1} \leq \|T^\Lambda(a)\|_p.\|T^\Psi(b)\|_{p'} \leq \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\|T^\Lambda(a)\|_p\cdot$$

En prenant la borne supérieure parmi les suites $b \in B_{\ell^{p'}(w(p))}$, on obtient finalement, pour tout Λ au moins $r_\varepsilon-$lacunaire, pour toute suite a dans la sphère unité de $\ell^p(w(p))$,

$$(1-\varepsilon) \leq \frac{1-\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2} \leq \|T^\Lambda(a)\|_p \leq (1+\varepsilon)\cdot$$

□

La preuve de ce résultat suit un autre schéma que celle de Gurariy et Macaev : la minoration repose sur une bonne majoration et un argument de dualité. Nous avons trouvé cette démarche plus élégante et plus adaptée au cas $p \in (1, +\infty)$.

Corollaire 2.27. *Soit $\varepsilon \in (0,1)$ et $p \in (1,+\infty)$. Alors il existe r'_ε tel que pour toute suite Λ telle que $(\lambda_n+1/p)_n$ est r'_ε-lacunaire, la famille normalisée $\left(\dfrac{t^{\lambda_n}}{\|t^{\lambda_n}\|_p}\right)_n$ est $(1+\varepsilon)$-isométrique (voir la Définition 2.17) à la base canonique de ℓ^p.*

Démonstration. Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille normalisée $g_n(t) = (p\lambda_n+1)^{\frac{1}{p}} t^{\lambda_n}$. On définit $S : \ell^p \to M^p_\Lambda$ par $S(b) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n g_n$ pour tout $b \in \ell^p$. L'application $I_p : \ell^p \to \ell^p(w(p))$ définie par $I_p(b) = (b_n w_n(p)^{-1/p})_n$ est une isométrie. De plus, comme $w_n(p)^{-1/p} = (p\lambda_n + 1)^{\frac{1}{p}}$, on a $S = T^\Lambda_p \circ I_p$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le Théorème 2.25 si $(\lambda_n + 1/p)_n$ est au moins $r_{\varepsilon/3}$-lacunaire alors S satisfait :

$$\forall b \in \ell^p, \quad (1-\varepsilon/3)\|b\|_{\ell^p} \leq \|S(b)\|_p \leq (1+\varepsilon/3)\|b\|_{\ell^p}.$$

Ainsi $\|S\|.\|S^{-1}\| \leq \dfrac{1+\varepsilon/3}{1-\varepsilon/3} \leq 1+\varepsilon$, et donc (g_n) et (e_n) sont $(1+\varepsilon)$-isométriques. □

Lemme 2.28. *Soient $p \in (1,+\infty)$ et $\lambda, \lambda' \in (-1/p,+\infty)$ avec $\lambda' > \lambda$. On note $g_\lambda(t) = (p\lambda+1)^{1/p} t^\lambda$ et $g_{\lambda'}(t) = (p\lambda'+1)^{1/p} t^{\lambda'}$ les deux monômes normalisés dans M^p_Λ. Alors pour tout $u \in (0,1)$, on a :*

$$\|g_\lambda + u g_{\lambda'}\|_p \geq 1 + \frac{u}{\alpha},$$

où α est le rapport $\alpha = \dfrac{\lambda'+1/p}{\lambda+1/p}$.

Démonstration. D'après l'inégalité de Hölder et comme $\|g_\lambda^{p-1}\|_{p'} = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\|g_\lambda + u g_{\lambda'}\|_p &\geq \int_0^1 (g_\lambda + u g_{\lambda'}) g_\lambda^{p-1} dt \\ &= 1 + u \int_0^1 g_{\lambda'} g_\lambda^{p-1} dt\end{aligned}$$

Posons pose $q_\lambda = (p\lambda+1)$ et $q_{\lambda'} = (p\lambda'+1)$. Comme $\lambda' > \lambda$, on a :

$$\int_0^1 g_{\lambda'} g_\lambda^{p-1} dt = \int_0^1 q_{\lambda'}^{\frac{1}{p}} q_\lambda^{\frac{1}{p'}} t^{(p-1)\lambda+\lambda'} dt \geq q_\lambda \int_0^1 t^{p\lambda'} dt = \frac{q_\lambda}{q_{\lambda'}}.$$

et on obtient l'inégalité voulue en posant $\alpha = \dfrac{q_{\lambda'}}{q_\lambda}$. □

Théorème 2.29. *Soit $p \in [1,+\infty)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La suite Λ satisfait $\lim\limits_{|n|\to+\infty} \dfrac{\lambda_{n+1}+1/p}{\lambda_n+1/p} = +\infty$;

(ii) La suite $\left(\dfrac{t^{\lambda_n}}{\|t^{\lambda_n}\|_p}\right)_n \in L^p$ est presque isométrique (voir la Définition 2.17) à la base canonique de ℓ^p.

Démonstration. Supposons que Λ satisfait la condition (i) et fixons $\delta > 0$ et $r'_\delta > 1$ le nombre donné par le Corollaire 2.27. D'après (i), il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda_{n+1} + 1/p \geq r'_\delta(\lambda_n + 1/p),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq m$. Nous définissons la suite $(\psi_n)_n$ par : $\psi_0 = \lambda_0$, $\psi_n = \lambda_{n+m}$ et $\psi_{-n} = \lambda_{-n-m}$ pour $n > 0$. Alors la suite $(\psi_n + 1/p)_n$ est au moins r'_δ lacunaire et d'après le Corollaire 2.21, la famille tronquée $\big((p\psi_n + 1)^{\frac{1}{p}} t^{\psi_n}\big)_n \in L^p$ est $(1+\delta)$-isométrique à la base canonique de ℓ^p, et on obtient (ii).
Réciproquement, soit Λ une suite telle que la famille $\big((p\lambda_n+1)^{\frac{1}{p}} t^{\lambda_n}\big)_n$ est presque isométrique à la base canonique de ℓ^p. Alors pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ avec $|n| \geq m$, pour tout $u \in (0,1)$, on a :

$$\|g_n + ug_{n+1}\|_p \leq (1+\varepsilon)\|e_n + ue_{n+1}\|_{\ell^p} \leq (1+\varepsilon)(1+u^p).$$

En appliquant cette inégalité pour $u = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ on obtient d'après le Lemme 2.28 :

$$1 + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\alpha_n} \leq 1 + 3\varepsilon,$$

où α_n est le rapport $\alpha_n = \dfrac{\lambda_{n+1} + 1/p}{\lambda_n + 1/p}$. On obtient donc $\alpha_n \geq \dfrac{\varepsilon^{-\frac{1}{p'}}}{3}$, donc Λ satisfait la condition (i). □

2.2.3 Quand M_Λ^∞ est $(1+\varepsilon)$-isométrique à c

Pour la norme uniforme, le théorème de Gurariy-Macaev donne une réponse différente du cas des espaces L^p : si Λ est lacunaire, alors la famille $(y_n)_n \in M_\Lambda^\infty$ définie par $y_n(t) = t^{\lambda_n}$ est équivalente à la base sommante de l'espace c (voir le théorème de Gurariy-Macaev 1.26). Avec les mêmes attentes que pour le cas $p = 1$ et $p \in (1, +\infty)$, nous allons raffiner ce théorème lorsque l'indice de lacunarité de Λ est grand.

Théorème 2.30. *Soit $\varepsilon \in (0,1)$. Alors il existe r_ε avec la propriété suivante : pour toute suite Λ au moins r_ε-lacunaire, on a*

$$\forall a \in c_{00}, \qquad (1-\varepsilon) \sup_N \Big| \sum_{n=-\infty}^{N} a_n \Big| \leq \Big\| \sum_n a_n t^{\lambda_n} \Big\|_\infty \leq \sup_N \Big| \sum_{n=-\infty}^{N} a_n \Big|.$$

Démonstration. La preuve rappelle celle du théorème de Tauber dans sa forme et dans la démarche suivie. Soit $a \in c_{00}$ et soit $r \geq r_\varepsilon$. Pour alléger les expressions, nous noterons $(S_k)_k$ la suite des sommes partielles définies pour $k \in \mathbb{Z}$ par

$$S_k = \sum_{n=-\infty}^{k} a_n.$$

De plus on notera $f \in M_\Lambda^\infty$ la fonction définie par $f(t) = \sum_n a_n t^{\lambda_n}$.

On commence par démontrer l'inégalité de droite. Elle est toujours vérifiée, sans hypothèse de lacunarité sur la suite Λ grâce à une transformation d'Abel. Pour tout $t \in [0,1)$, la suite $(t^{\lambda_k})_k$ est décroissante et on a donc :

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_n a_n t^{\lambda_n} \Big| &= \Big| \sum_n a_n \sum_{k=n}^{+\infty} (t^{\lambda_k} - t^{\lambda_{k+1}}) \Big| \\
&= \Big| \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t^{\lambda_k} - t^{\lambda_{k+1}}) \sum_{n=-\infty}^{k} a_n \Big| \\
&\leq \Big(\lim_{k \to -\infty} t^{\lambda_k} - \lim_{k \to +\infty} t^{\lambda_{k+1}} \Big) \sup_k |S_k|.
\end{aligned}$$

On obtient donc la majoration. Pour la minoration, on fixe $k \in \mathbb{N}$ et $x \in (0,1)$. On a :

$$\begin{aligned} |S_k - f(x)| &= \Big| \sum_{n=-\infty}^{k} a_n(1 - x^{\lambda_n}) - \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n x^{\lambda_n} \Big| \\ &\leq \sup_n |a_n| \Big(\sum_{n=-\infty}^{k} (1 - x^{\lambda_n}) + \sum_{n=k+1}^{+\infty} x^{\lambda_n} \Big) \end{aligned}$$

On va évaluer et minorer cette expression, pour la valeur $x = x_k = \exp(-\frac{1}{\sqrt{r}\lambda_k}) \in (0,1)$. D'après l'inégalité de convexité $1 - \exp(-t) \leq t$ on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{k} (1 - x_k^{\lambda_n}) &= \sum_{n=-\infty}^{k} (1 - e^{-\frac{\lambda_n}{\sqrt{r}\lambda_k}}) \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{k} \frac{\lambda_n}{\sqrt{r}\lambda_k} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=-\infty}^{k} \frac{1}{r^{k-n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}(1 - r^{-1})} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad , \end{aligned}$$

en utilisant $r \geq 2$ et $\sqrt{r} \geq \frac{8}{\varepsilon}\cdot$ D'autre part, l'inégalité $\exp(-t) \leq \frac{1}{t}$ nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{+\infty} x_k^{\lambda_n} &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda_n}{\sqrt{r}\lambda_k}} \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{+\infty} \sqrt{r}\frac{\lambda_k}{\lambda_n} \\ &\leq \frac{\sqrt{r}}{r-1} \leq \frac{\varepsilon}{4}\cdot \end{aligned}$$

En utilisant $\sup\limits_n |a_n| \leq 2 \sup\limits_k |S_k|$, on obtient pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$|S_k| - |f(x_k)| \leq |S_k - f(x_k)| \leq 2 \sup_k |S_k| \big(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\big) = \varepsilon \sup_k |S_k|\cdot$$

On obtient donc :

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |f(x_k)| \geq \big(1 - \varepsilon\big) \|S\|_{\ell^\infty}.$$

□

Corollaire 2.31. *Soit $\varepsilon \in (0,1)$. Alors il existe r'_ε tel que pour toute suite Λ au moins r'_ε-lacunaire, la suite $(y_n)_n \in M_\Lambda^\infty$ donnée par $y_n(t) = t^{\lambda_n}$ est $(1+\varepsilon)$-isométrique (voir la Définition 2.17) à la base sommante de c.*

Démonstration. Notons $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la base sommante de c. L'opérateur $S_\infty :\to M_\Lambda^\infty$ défini par $S_\infty(\sum_n b_n f_n) = \sum_n b_n y_n$ est borné et inversible si Λ est lacunaire. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le Théorème 2.30 si $(\lambda_n)_n$ est au moins $r_{\varepsilon/2}$-lacunaire alors S satisfait :

$$\forall b \in c, \quad (1 - \varepsilon/2)\|b\|_{\ell^\infty} \leq \|S_\infty(b)\|_\infty \leq \|b\|_{\ell^\infty}.$$

Ainsi $\|S\|.\|S^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \varepsilon/2} \leq 1 + \varepsilon$, et donc (y_n) et (f_n) sont $(1+\varepsilon)$-isométriques. □

Remarque 2.32. Intéressons nous un instant aux espaces de suites c et c_0. Dans c_0 on a la base canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par :

$$e_n = (\ldots 0, 0, 1, 0, 0 \ldots),$$

où l'unique 1 est sur la n-ième entrée. Dans c, on définit la base sommante $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$f_n = (\ldots, 0, 0, 1, 1, 1 \ldots),$$

où le premier 1 est sur la n-ième entrée. De plus, la famille $\{f_0\} \cup \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ forme une autre base de c. Pour une suite $u = (u_k)_k \in c$, les coefficients de u dans cette deuxième base sont de la forme : $u = \alpha f_0 + \sum_{n<0} u_n e_n + \sum_{n\geq 0}(u_n - \alpha)e_n$, où $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n$. On a $c_0 = \mathrm{Adh}(Span(e_n, n \in \mathbb{Z}), \| \, . \, \|_\infty)$ et $e_n = f_n - f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit Λ une suite lacunaire. D'après le théorème de Gurariy-Macaev, les suites $(f_n) \in c$ et $(t^{\lambda_n})_n \in M_\Lambda^\infty$ sont équivalentes. De plus les familles $(e_n) \in c_0$ et $(t^{\lambda_n} - t^{\lambda_{n+1}}) \in M_\Lambda^\infty$ sont équivalentes, donc il existe un sous-espace $F_0 \subset M_\Lambda^\infty$ défini par :

$$F_0 = \mathrm{Adh}(Span\{t^{\lambda_n} - t^{\lambda_{n+1}}, n \in \mathbb{Z}\}) = \{f \in M_\Lambda^\infty, f(1) = 0\},$$

tel que F_0 est isomorphe à c_0. De plus si Λ est au moins r'_ε-lacunaire, alors F_0 est une copie $(1+\varepsilon)$-isométrique de c_0.

Le résultat suivant est l'équivalent des Lemmes 2.23 et 2.28 avec la norme uniforme :

Lemme 2.33. *Soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\lambda \neq \lambda'$. Alors on a :*

$$\|t^\lambda - t^{\lambda'}\|_\infty = \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} \Big|1 - \frac{1}{\alpha}\Big|,$$

où α est le rapport $\alpha = \dfrac{\lambda'}{\lambda}\cdot$

Démonstration. Comme l'expression $\alpha \mapsto (\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}|1 - \frac{1}{\alpha}|$ est invariante en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$, on peut supposer que $\lambda' > \lambda$. Le maximum de la fonction $t \mapsto t^\lambda - t^{\lambda'}$ est atteint en son unique point critique x donné par

$$x = \Big(\frac{\lambda}{\lambda'}\Big)^{\frac{1}{\lambda'-\lambda}},$$

et en notant $\alpha = \dfrac{\lambda'}{\lambda}$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big(\frac{\lambda}{\lambda'}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda'-\lambda}} - \Big(\frac{\lambda}{\lambda'}\Big)^{\frac{\lambda'}{\lambda'-\lambda}} \\ &= \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ &= \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} \Big(1 - \frac{1}{\alpha}\Big). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.34. *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) la suite Λ satisfait $\displaystyle\lim_{|n|\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty$;

(ii) la suite $(t^{\lambda_n}) \in \mathcal{C}$ est presque isométrique à la base sommante de c.

Démonstration. Supposons que Λ satisfait la condition (i) et fixons $\delta > 0$. On considère l'indice $r_\delta > 1$ donné par le Corollaire 2.21. D'après (i), il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda_{n+1} \geq r_\delta \lambda_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq m$. Nous définissons la suite $(\psi_n)_n$ par : $\psi_0 = \lambda_0$, $\psi_n = \lambda_{n+m}$ et $\psi_{-n} = \lambda_{-n-m}$ pour $n > 0$. Alors la suite $(\psi_n)_n$ est au moins r_δ-lacunaire et d'après le Théorème 2.30, la famille tronquée $(t^{\psi_n})_n \in \mathcal{C}$ est $(1+2\delta)$-équivalente à la base sommante de c, et comme δ est arbitraire on obtient (ii). Réciproquement, soit Λ une suite telle que la famille $(t^{\lambda_n})_n$ est presque isométrique à la base sommante $(f_n)_n$ de c. En particulier, on a :

$$\lim_{|n|\to\infty} \|t^{\lambda_n} - t^{\lambda_{n+1}}\|_\infty = 1,$$

car la base sommante satisfait pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\|f_n - f_{n+1}\|_{\ell^\infty} = 1$. En appliquant le Lemme 2.33, on obtient donc $\lim\limits_{|n|\to+\infty} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty$. $\square$

Remarque 2.35. Un papier récent a démontré que tout espace de Müntz M_Λ^∞ contient des copies asymptotiquement isométriques de c_0 (voir [2]). Nous retrouvons un analogue “presque isométrique” de ce résultat avec une construction explicite de certains sous-espace en question : il suffit de considérer une sous-suite $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n\geq 0} \subset \Lambda$ telle que

$$\frac{\lambda'_{n+1}}{\lambda'_n} \to +\infty.$$

Alors l'espace $F_0 = \mathrm{Adh}(Span(t^{\lambda'_n} - t^{\lambda'_{n+1}}), \|\ .\ \|_\infty)$ est un sous-espace de M_Λ^∞ qui est presque isométrique à c_0 (voir Rem. 2.32).

Chapitre 3

Mesures de Carleson des espaces de Müntz

Sommaire

3.1 Mesures de Carleson quand Λ est général 65
3.1.1 Conditions nécessaires 65
3.1.2 Conditions suffisantes 67
3.1.3 Opérateurs de composition à poids 72
3.2 Mesures de Carleson quand Λ est lacunaire 76
3.2.1 Bornitude de $J_{\mu,q}$ 76
3.2.2 Compacité de $J_{\mu,q}$ 81
3.2.3 L'opérateur $J_{\mu,2}$: classes de Schatten 84
3.2.4 Exemples 89
3.3 Mesures de Carleson quand Λ est quasi-lacunaire 92
3.3.1 Espaces de Müntz quasi-lacunaires 92
3.3.2 Caractérisation des mesures de Carleson de M_Λ^p 95

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux mesures de Carleson des espaces de Müntz. On considèrera des espaces de Müntz $M_\Lambda^p \subsetneq L^p$, où $p \in [1,+\infty)$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ est une suite strictement croissante satisfaisant le critère de Müntz

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty,$$

ainsi que la gap condition

$$\inf_{n\geq 0} \Big(\lambda_{n+1} - \lambda_n\Big) > 0.$$

Sous ces hypothèses les fonctions $f \in M_\Lambda^p$ sont analytiques réelles sur $(0,1)$, d'après le théorème de Clarkson-Erdös.

Définition 3.1. Soit $p \in [1,+\infty)$ et $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$, c'est à dire μ est une mesure borélienne, positive et finie sur $[0,1]$, qui satisfait $\mu(\{1\}) = 0$ (voir Rem. 3.5 dans la suite). On dit que μ est une *mesure de Carleson de* M_Λ^p si il existe une constante C ne dépendant que de Λ et p telle que :

$$\forall f \in M(\Lambda), \quad \|f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_p.$$

On notera parfois $Car(M_\Lambda^p)$ l'ensemble des mesures de Carleson de M_Λ^p. Pour une mesure $\mu \in Car(M_\Lambda^p)$, on définit l'opérateur borné (voir Prop. 3.6 dans la suite) :

$$J_{\mu,p} : \left\{ \begin{array}{ccc} M_\Lambda^p & \longrightarrow & L^p(\mu) \\ f & \longmapsto & f. \end{array} \right.$$

3.1 Mesures de Carleson quand Λ est général

Dans un premier temps, nous considérons des espaces de Müntz M^p_Λ assez généraux. Les résultats de cette partie s'inspirent largement des travaux de I. Chalendar, E. Fricain et D. Timotin (voir [18]), puis de W. Noor et D. Timotin (voir [43]).

Toutefois, nous démontrons quelques résultats originaux, dont certains ont été obtenus en collaboration avec P. Lefèvre et apparaissent dans [25].

Les estimations qui suivent seront nos principaux outils pour aborder le problème des mesures de Carleson.

Lemme 3.2. *Soit Λ une suite satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition. Alors pour tout ε, il existe une constante K_ε telle que l'on a l'inégalité suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq K_\varepsilon (1+\varepsilon)^{\lambda_n} \|f\|_p,$$

pour tout polynôme $f(t) = \sum_{k=1}^m a_k t^{\lambda_k} \in M(\Lambda)$.

Cette inégalité est l'essence du théorème de Clarkson-Erdös (voir Th. 1.14) et c'est une conséquence immédiate du Théorème 1.12 que nous avons énoncé plus tôt. Nous aurons aussi un deuxième outil très utile pour étudier les plongements de Carleson :

Lemme 3.3. *Soit Λ satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition. Alors pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe une constante $C_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\forall f \in M(\Lambda), \quad \|f\|_{[0,1-\varepsilon]} \leq C_\varepsilon \|f\|_p.$$

De même, ce résultat est une conséquence directe de la Proposition 1.16. En général, la meilleure constante C_ε possible dépend de p.

3.1.1 Conditions nécessaires

Nous commençons cette partie en remarquant quelques propriétés immédiates des mesures de Carleson de M^p_Λ. La proposition suivante est l'équivalent de [18, Lemme 4.1].

Proposition 3.4. *Soient $p \in [1,+\infty)$, M^p_Λ un espace de Müntz et $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1])$ une mesure de Carleson de M^p_Λ. Alors on a :*

1) *μ satisfait $\mu(\{1\}) = 0$.*
2) *De plus, μ satisfait : $\mu\big([1-1/(p\lambda_n), 1)\big) = O\Big(\dfrac{1}{\lambda_n}\Big)$ quand $n \to +\infty$.*
3) *Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu \leq M. \tag{B_p}$$

Démonstration. Soit μ une mesure de Carleson de M^p_Λ et $(g_n)_{n\geq 0} \in M^p_\Lambda$ la suite de fonctions définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $g_n(t) = \lambda_n^{1/p} t^{\lambda_n}$. Comme les $(g_n)_n$ sont dans la boule unité de M^p_Λ, on obtient le point 3) directement :

$$\sup_{n\geq 0} \lambda_n \int_{[0,1]} t^{p\lambda_n} d\mu = \sup_{n\geq 0} \|g_n\|^p_{L^p(\mu)} \leq C^p.$$

De plus, la suite $(t \mapsto t^{p\lambda_n})_n$ est une suite décroissante de fonctions qui converge ponctuellement vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$ et qui tend vers 0 dans L^p. D'après le théorème de convergence monotone, toute mesure de Carleson de M^p_Λ doit satisfaire $\mu(\{1\}) = 0$, d'où on obtient 1). Le point 2) vient de l'estimation suivante entre les moments d'une mesure, et les mesures de certains voisinages de 1 :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu &\geq \int_{[1-\frac{1}{p\lambda_n},1)} t^{p\lambda_n} d\mu \\ &\geq \Big(1-\frac{1}{p\lambda_n}\Big)^{p\lambda_n} \mu\Big([1-1/(p\lambda_n),1)\Big).\end{aligned}$$

Comme la suite $\big((1-\frac{1}{p\lambda_n})^{p\lambda_n}\big)_n$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand $n \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $(1-1/(p\lambda_n))^{p\lambda_n} \geq \frac{1}{3}$. En appliquant 3), on obtient alors pour tout $n \geq n_0$:

$$\mu\Big([1-1/(p\lambda_n),1)\Big) \leq 3 \sup_{n\geq n_0} \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu \leq \frac{3C^p}{\lambda_n},$$

et le point 2) suit. □

Remarque 3.5. C'est parce que la condition $\mu(\{1\}) = 0$ est nécessaire pour avoir $\mu \in Car(M^p_\Lambda)$ que nous considérons des mesures $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ dans la Définition 3.1.

Les mesures de Carleson se caractérisent de la manière suivante :

Proposition 3.6. *Soit $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et $p \in [1,\infty)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *l'inclusion ensembliste $M^p_\Lambda \subset L^p(\mu)$ est satisfaite ;*

(*ii*) *il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout polynôme de Müntz $f \in M(\Lambda)$,*

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_p \ ;$$

(*iii*) *l'opérateur d'inclusion $J_{\mu,p} : M^p_\Lambda \to L^p(\mu)$ est borné.*

Démonstration. Il est clair que l'on a $(iii) \Rightarrow (ii)$, et le point $(ii) \Rightarrow (i)$ est direct d'après la densité des polynômes de Müntz dans M^p_Λ. Le point $(i) \Rightarrow (iii)$ est une conséquence du théorème du graphe fermé : supposons que μ satisfait la condition (i), et soit (g,h) dans l'adhérence du graphe $\mathcal{G}$ de l'inclusion défini par :

$$\mathcal{G} = \{(f,f), f \in M^p_\Lambda\} \subset M^p_\Lambda \times L^p(\mu).$$

Il existe alors une suite $(f_n)_n \in M^p_\Lambda$ telle que $f_n \to g$ dans M^p_Λ et $f_n \to h$ dans $L^p(\mu)$ et il s'agit de montrer que $h(x) = g(x)$ pour μ-presque tout $x \in [0,1)$. D'après une propriété classique des espaces $L^p(\mu)$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge μ-presque partout vers h. D'autre part, quitte à extraire encore, on peut supposer que $(f_{n_k})_k$ converge uniformément vers g sur tout compact de $[0,1)$ d'après le Corollaire 1.18. Comme $\mu(\{1\}) = 0$, la convergence uniforme sur tout compact de $[0,1)$ entraîne la convergence μ-presque partout, on obtient bien $h(x) = g(x)$ pour μ-presque tout $x \in [0,1]$. Ainsi $\mathcal{G}$ est fermé, ce qui conclut la preuve. □

On pourra adopter ces trois différents points de vue lorsque μ est une mesure de Carleson de M^p_Λ. En particulier le point (iii) nous permettra d'étudier des propriétés plus fines que peut satisfaire l'opérateur d'inclusion $J_{\mu,p}$.

Nous trouvons aussi des conditions nécessaires pour que l'opérateur $J_{\mu,p}$ soit compact en testant les monômes.

Proposition 3.7. *Soient $p \in [1,+\infty)$, M^p_Λ un espace de Müntz et μ une mesure de Carleson de M^p_Λ. Alors on a :*

1) si $p > 1$ et $J_{\mu,p}$ est compact, alors μ satisfait :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu = 0. \tag{b_p}$$

2) Si $p = 1$ et $J_{\mu,1}$ est faiblement compact, alors μ satisfait :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu = 0. \tag{b_1}$$

En particulier si $J_{\mu,1}$ est compact alors μ satisfait (b_1).

Démonstration. Soit $p > 1$ et μ une mesure de Carleson de M^p_Λ telle que $J_{\mu,p}$ est compact. Nous considérons à nouveau les fonctions $(g_n) \in M^p_\Lambda$ définies par $g_n(t) = \lambda_n^{1/p} t^{\lambda_n}$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t) t^k dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n^{\frac{1}{p}}}{\lambda_n + k + 1} = 0,$$

car $p > 1$. Donc pour tout polynôme $g(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)g(t)dt = 0$. Par densité des polynômes dans $L^{p'}$ (car p' est fini), la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans L^p. De plus, d'après la compacité de l'opérateur $J_{\mu,p}$, la suite $\big(J_{\mu,p}(g_n)\big)_n$ converge fortement vers 0 dans $L^p(\mu)$, d'où on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu = 0.$$

Supposons maintenant que $J_{\mu,1}$ est faiblement compact. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $H = \{g_n, n \in \mathbb{N}\} \subset L^1(\mu)$. Par hypothèse, H est bornée dans $L^1(\mu)$ et faiblement relativement compacte. Ainsi H est uniformément intégrable d'après [53, Th.III.C.12 p.137]), c'est à dire : il existe un nombre $\delta > 0$ qui ne dépend que de ε tel que pour tout ensemble mesurable $A \subset [0,1)$ satisfaisant $\mu(A) \leq \delta$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_A \lambda_n t^{\lambda_n} d\mu \leq \varepsilon.$$

Comme $\mu(\{1\}) = 0$, il existe $s \in (0,1)$ tel que $\mu([s,1)) \leq \eta$, et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} \lambda_n t^{\lambda_n} d\mu &= \int_{[0,s)} \lambda_n t^{\lambda_n} d\mu + \int_{[s,1]} \lambda_n t^{\lambda_n} d\mu \\ &\leq \lambda_n s^{\lambda_n} \mu([0,1)) + \varepsilon,\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, cette quantité tend vers ε, qui est arbitraire, donc on obtient bien la condition (b_1). □

3.1.2 Conditions suffisantes

Nous démontrons quelques conditions suffisantes pour qu'une mesure μ soit une mesure de Carleson pour M^p_Λ. Commençons par le cas des mesures absolument continues sur un voisinage du point 1.

Proposition 3.8. *Soient $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$, $\varepsilon \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ et M^p_Λ un espace de Müntz. Supposons que $\mu_{|[1-\varepsilon,1)}$ est absolument continue par rapport à $\lambda_{|[1-\varepsilon,1)}$ et que sa densité $h = \dfrac{d\mu_{|[1-\varepsilon,1)}}{d\lambda_{|[1-\varepsilon,1)}}$ est essentiellement bornée. Alors μ est une mesure de Carleson de M^p_Λ, et il existe une constante C qui ne dépend que de ε, p et Λ telle que :*

$$\|J_{\mu,p}\| \leq C\Big(\mu([0,1)) + \|h\|_\infty\Big)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

Si de plus, $\operatorname{ess\,inf} |h| > 0$, alors μ est un plongement inverse : il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ dépendant uniquement de ε, p et Λ telles que pour toute fonction $f \in M^p_\Lambda$,

$$C_1\Big(\frac{1}{\|h^{-1}\|_\infty}\Big)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \leq C_2 \|h\|_\infty^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

Démonstration. On note h la densité de μ au voisinage de 1. Le calcul suivant est immédiat :

$$\int_{[0,1)} |f(t)|^p d\mu(t) \leq \|f\|^p_{[0,1-\varepsilon]}\mu([0,1)) + \|h\|_\infty \|f\|^p_p.$$

D'après le Lemme 3.3 on obtient l'existence d'une constante $C = \left(C^p_\varepsilon \mu([0,1)) + \|h\|_\infty\right)^{\frac{1}{p}}$ telle que pour tout polynôme $f \in M(\Lambda)$ on a :

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_p.$$

De même, la minoration vient du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(\mu)} &\geq \int_{[1-\varepsilon,1)} |f(t)|^p.|h(t)|dt \\
&\geq \operatorname{ess\,inf} |h| \int_{1-\varepsilon}^1 |f(t)|^p dt \\
&= \frac{1}{\|h^{-1}\|_\infty} \|f\|^p_{L^p([1-\varepsilon,1])}.
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.19, les normes $\| \,.\, \|_p$ et $\| \,.\, \|_{L^p([1-\varepsilon,1])}$ sont équivalentes sur M^p_Λ, et donc il existe une constante C qui ne dépend que de ε et Λ telle que :

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \geq C\Big(\frac{1}{\|h^{-1}\|_\infty}\Big)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

$\square$

La deuxième partie de la Proposition précédente avait été remarquée par A. Blandignères dans M^1_Λ : il avait démontré ce résultat lorsque la densité h est continue au point 1 (voir [12]). Dans ce cas, on connaît aussi la norme essentielle de $J_{\mu,p}$.

Proposition 3.9. [43, Prop. 2.6], [18, Cor. 3.6] *Soient $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$, $\varepsilon \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ et M^p_Λ un espace de Müntz. Supposons que $\mu_{|[1-\varepsilon,1)}$ est absolument continue par rapport à $\lambda_{|[1-\varepsilon,1)}$ et que sa densité $h = \dfrac{d\mu_{|[1-\varepsilon,1)}}{d\lambda_{|[1-\varepsilon,1)}}$ est essentiellement bornée et continue au point 1. Alors on a :*

$$\|J_{\mu,p}\|_e = |h(1)|^{1/p}.$$

Le résultat suivant est une amélioration de [18, Prop. 3.2].

Théorème 3.10. *Si le support de μ est inclus dans un compact de $[0,1)$, alors $J_{\mu,p}$ est nucléaire, donc il est compact.*

Démonstration. Soit μ une mesure satisfaisant $Supp(\mu) \subset [0,\delta]$ où $\delta < 1$. On fixe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)\delta < 1$. D'après le Lemme 3.2 il existe K_ε tel que pour tout polynôme de Müntz $f(t) = \sum_k b_k t^{\lambda_k}$, les coefficients (b_n) satisfont : $|b_n| \leq K_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_n}\|f\|_p$. En particulier, les formes linéaires a^*_n définies par

$$a^*_n : \left\{ \begin{array}{ccc} M(\Lambda) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \displaystyle\sum_k b_k t^{\lambda_k} & \longmapsto & b_n, \end{array} \right.$$

se prolongent en forme linéaires continues sur M^p_Λ, et elles satisfont $\|a^*_n\|_{(M^p_\Lambda)^*} \leq K_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_n}$. On définit les fonctions monômes $g_n(t) = t^{\lambda_n} \in L^p(\mu)$, et comme $Supp(\mu) \subset [0,\delta]$, on a

$$\|g_n\|_{L^p(\mu)} \leq \mu([0,1))\delta^{\lambda_n}.$$

D'autre part, pour tout polynôme $f \in M(\Lambda)$ on a :

$$J_{\mu,p}(f) = \sum_{k} a_n^*(f) g_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (g_n \otimes a_n^*)(f).$$

Comme $M(\Lambda)$ est dense dans M_Λ^p, l'opérateur $J_{\mu,p}$ est la limite quand $m \to +\infty$ de la suite $(\sum_{n=0}^{m} g_n \otimes a_n^*)_m$ pour la topologie forte des opérateurs. De plus

$$\sum_{k\geq 0} \|g_n \otimes a_n^*\| \leq K_\varepsilon \mu([0,1)) \sum_{k\geq 0} \Big(\delta(1+\varepsilon)\Big)^{\lambda_k} < +\infty,$$

et donc $J_{\mu,p}$ est un opérateur nucléaire. □

Cette propriété avait déjà été remarquée dans [8] pour les opérateurs de composition : les auteurs avaient démontré que lorsque le symbole φ satisfait $\|\varphi\|_\infty < 1$, alors C_φ est nucléaire (voir la Définition 3.17 dans la suite).

Exemple 3.11. Nous avons déjà deux types d'exemples de mesures de Carleson de M_Λ^p :

1) Les mesures μ satisfaisant $\mu \ll \lambda$, et telles que la densité $\frac{d\mu}{d\lambda}$ est bornée sur $[0,1]$ sont des mesures de Carleson de L^p, donc a fortiori de M_Λ^p. De plus, d'après la Proposition 3.8, il suffit de supposer cette hypothèse sur un voisinage de 1 pour garantir $\mu \in Car(M_\Lambda^p)$.
2) Pour tout $x \in [0,1)$, la mesure de Dirac $\mu = \delta_x$ définie par

$$\forall f \in M_\Lambda^p, \quad \int_{[0,1)} f(t) d\mu(t) = f(x),$$

est une mesure de Carleson de M_Λ^p. Il en suit que toute mesure ν de la forme

$$\nu = \sum_{k=1}^{m} \delta_{x_k},$$

où $x_1, \ldots, x_m \in [0,1)$, est une mesure de Carleson de M_Λ^p. De plus, l'opérateur $J_{\nu,p}$ est de rang fini dans ce cas.

Dans les cas précédents, nous imposons directement de fortes hypothèses sur le comportement de la mesure μ au voisinage de 1. Il est aussi possible de déterminer des critères suffisants pour avoir $\mu \in Car(M_\Lambda^p)$ en construisant des "indicateurs" qui dépendent uniquement de p et Λ à l'aide des inégalités des Lemmes 3.2 et 3.3. Le premier exemple est la fonction κ_Λ qui a été considérée dans [18] pour le cas $p = 1$. Dans [43], les auteurs introduisent la fonction ψ_Λ, dans le même but mais pour l'appliquer dans le cas $p = 2$.

Définition 3.12. Soit κ_Λ la fonction sur $[0,1)$ définie par $\kappa_\Lambda(t) = C_{1-t}$, où $C_{1-t} \in \mathbb{R}_+$ est la plus petite constante possible pour satisfaire le Lemme 3.3, c'est à dire :

$$\kappa_\Lambda(t) = C_{1-t} = \sup_{\substack{f\in M(\Lambda)\\ f\neq 0}} \frac{\|f\|_{[0,t]}}{\|f\|_p} < +\infty.$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $d_n = \mathrm{dist}(x^{\lambda_n}, M(\Lambda \setminus \{\lambda_n\}))$. D'après le théorème de Müntz, $d_n > 0$ pour tout n. Sous la gap-condition, le théorème de Clarkson-Erdös donne une borne inférieure plus précise de la valeur de d_n. Soit f un polynôme de Müntz, et n un entier naturel. On a :

$$\|f\|_p = \Big\| a_n t^{\lambda_n} + \sum_{k\neq n} a_k t^{\lambda_k} \Big\|_p = |a_n| . \|t^{\lambda_n} - g\|_p,$$

où $g \in M(\Lambda \setminus \lambda_n)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, en appliquant le Lemme 3.2 on obtient :

$$\frac{1}{d_n} = \sup_{\substack{f \in M(\Lambda) \\ f \neq 0}} \frac{|a_n^*(f)|}{\|f\|_p} \leq K_\varepsilon (1+\varepsilon)^{\lambda_n},$$

où $a_n(f)$ désigne le n-ième coefficient de son développement de Clarkson-Erdös. On obtient en particulier $\limsup_{n \to +\infty} d_n^{-\frac{1}{\lambda_n}} \leq 1$. Donc la série entière suivante

$$\psi_\Lambda(t) = \sum_n d_n^{-1} t^{\lambda_n},$$

converge uniformément sur tout compact de $[0,1)$.

Proposition 3.13. *Si $\kappa_\Lambda \in L^p(\mu)$ ou si $\psi_\Lambda \in L^p(\mu)$, alors on a :*

1) La mesure μ est une mesure de Carleson de M_Λ^p.

2) L'opérateur $J_{\mu,p}$ est borné pour l'ordre.

3) L'opérateur $J_{\mu,p}$ est compact.

Démonstration. Soit $f \in M(\Lambda)$ non nulle. Par définition de κ_Λ, on a pour tout $t \in [0,1)$:

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq \frac{\|f\|_{[0,t]}}{\|f\|_p} \|f\|_p \\ &\leq \sup_{\substack{g \in M(\Lambda) \\ g \neq 0}} \frac{\|g\|_{[0,t]}}{\|g\|_p} \|f\|_p \\ &= \kappa_\Lambda(t) \|f\|_p. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\kappa_\Lambda \in L^p(\mu)$, alors c'est une borne pour l'ordre de $J_{\mu,p}$. De même, on a pour tout $t \in [0,1)$:

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \Big| \sum_{n \geq 0} \frac{a_n^*(f)}{\|f\|_p} t^{\lambda_n} \Big| . \|f\|_p \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \sup_{\substack{g \in M(\Lambda) \\ g \neq 0}} \frac{|a_n^*(g)|}{\|g\|_p} t^{\lambda_n} \|f\|_p \\ &= \psi_\Lambda(t) \|f\|_p, \end{aligned}$$

donc si $\psi_\Lambda \in L^p(\mu)$, alors c'est une borne pour l'ordre de $J_{\mu,p}$. En particulier, dans les deux cas on obtient $J_{\mu,p}$ est borné et on a :

$$\|J_{\mu,p}\| \leq \|\kappa_\Lambda\|_{L^p(\mu)} \quad (\text{resp.} \|J_{\mu,p}\| \leq \|\psi_\Lambda\|_{L^p(\mu)}).$$

On va maintenant montrer que $J_{\mu,p}$ est compact. On peut appliquer une variante du Corollaire 1.51 pour calculer la norme essentielle de $J_{\mu,p}$: nous définissons les mesures $\mu_k = \mu_{|[0,1-1/k]}$ et $\mu'_k = \mu_{|(1-1/k,1)}$. D'après le Théorème 3.10, l'opérateur $J_{\mu_k,p}$ est compact pour tout k, donc on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|J_{\mu,p}\|_e &\leq \|J_{\mu,p} - J_{\mu_k,p}\| = \|J_{\mu'_k,p}\| \\ &\leq \Big(\int_{[0,1)} \kappa_\Lambda(t)^p d\mu'_k(t) \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int_{(1-\frac{1}{k},1)} \kappa_\Lambda(t)^p d\mu(t) \Big)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et cette quantité tend vers 0 quand $k \to +\infty$ d'après le théorème de convergence dominée (c'est le même calcul pour ψ_Λ). $\square$

Remarque 3.14. Les indicateurs κ_Λ et ψ_Λ ne sont pas très précis pour caractériser les mesures de Carleson :

1) Les critères suffisants $\kappa_\Lambda \in L^p(\mu)$, $\psi_\Lambda \in L^p(\mu)$, entraînent aussi la compacité de $J_{\mu,p}$, mais nous avons déjà vu qu'il existe des mesures de Carleson absolument continues au voisinage du point 1 telles que $J_{\mu,p}$ n'est pas compact (voir Prop.3.8).
2) Dans la définition des indicateurs, le fait de prendre la borne supérieure parmi toutes les fonctions $f \in M(\Lambda)$ pour chaque valeur de t (pour définir κ_Λ) ou pour chaque valeur de n (pour définir ψ_Λ) coûte très cher. C'est probablement pour cela que ces indicateurs ne peuvent pas caractériser la bornitude.

L'autre problème c'est que κ et ψ sont difficiles à estimer en pratique, sauf dans certains cas particuliers. On peut trouver une estimation de κ_Λ lorsque $\Lambda = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ dans [18]. Dans le cas lacunaire, on obtient aussi une bonne estimation.

Proposition 3.15. *Si Λ est lacunaire, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que :*

$$\forall t \in [0,1), \quad \kappa_\Lambda(t) \le C\Big(\frac{1}{1-t}\Big)^{\frac{1}{p}} \quad et \quad \psi_\Lambda(t) \le C\Big(\frac{1}{1-t}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier, si Λ est lacunaire et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est μ-intégrable, alors $\mu \in Car(M^p_\Lambda)$, $J_{\mu,p}$ est compact, et on a :

$$\|J_{\mu,p}\| \le \Big(\int_{[0,1)} \frac{d\mu(t)}{1-t}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Comme Λ est lacunaire, d'après le Théorème de Gurariy-Macaev, il existe une constante $C_1 \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\|f\|_p \ge C_1\Big(\sum_n \frac{|a_n|^p}{\lambda_n}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout polynôme de Müntz $f(t) = \sum_n a_n t^{\lambda_n} \in M(\Lambda)$ (voir Cor. 1.28). Alors on a pour tout $t \in [0,1)$:

$$\kappa_\Lambda(t) = \sup_{\substack{f\in M(\Lambda)\\ f\neq 0}} \frac{\sup_{u\in[0,t]}\Big|\sum_n a_n u^{\lambda_n}\Big|}{\|f\|_p} \le \frac{1}{C_1} \sup_{\substack{a\in c_{00}\\ a\neq 0}} \frac{\sum_n |a_n| t^{\lambda_n}}{\|a\|_{\ell^p(\frac{1}{\lambda_n})}}.$$

Supposons tout d'abord que $p > 1$. D'après l'inégalité de Hölder et le Lemme 1.30, il existe une constante $C \ge 0$ telle que :

$$\kappa_\Lambda(t) \le \frac{1}{C_1}\Big(\sum_n t^{p'\lambda_n}\lambda_n^{\frac{p'}{p}}\Big)^{\frac{1}{p'}} \le C\Big(\frac{1}{1-t}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = 1$, alors par dualité, on a :

$$\kappa_\Lambda(t) \lesssim \sup_{b\in B_{\ell^1}} \Big|\sum_n b_n \lambda_n t^{\lambda_n}\Big| = \Big\|\big(\lambda_n t^{\lambda_n}\big)\Big\|_{\ell^\infty} \le \sup_{s\ge\lambda_0} st^s = \frac{1}{e|\log(t)|} \lesssim \frac{1}{1-t}.$$

Pour la fonction ψ_Λ, on applique aussi le théorème de Gurariy-Macaev (Th. 1.25) : comme la suite $\big(\lambda_n^{1/p} t^{\lambda_n}\big)_n$ est δ-minimale (uniformément minimale avec la constante δ) dans L^p, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$d_n^{-1} = \frac{\lambda_n^{\frac{1}{p}}}{\mathrm{dist}\big(\lambda_n^{\frac{1}{p}} t^{\lambda_n}, M(\Lambda\setminus\lambda_n)\big)} \le \frac{\lambda_n^{\frac{1}{p}}}{\delta}.$$

D'après le Lemme 1.30 encore, il existe une constante C telle que

$$\psi_\Lambda(t) \le \frac{1}{\delta}\sum_n \lambda_n^{\frac{1}{p}} t^{\lambda_n} \le C\Big(\frac{1}{1-t}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Remarque 3.16. En combinant les Propositions 3.13 et 3.15, on obtient aussi : si la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est μ-intégrable et Λ est lacunaire, alors $J_{\mu,2}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. En effet, nous avons démontré que $J_{\mu,2}$ est borné pour l'ordre dans ce cas, et d'après la Remarque 1.42 les opérateurs de la classe $\mathcal{S}^2$ sont exactement les opérateurs bornés pour l'ordre.

3.1.3 Opérateurs de composition à poids

Les opérateurs de composition à poids induisent des mesures de Carleson de M_Λ^p d'une manière naturelle. Nous rappelons tout d'abord la définition de ces opérateurs. Les résultats de cette partie sont une synthèse de certains résultats dans [5, 8, 18, 42].

Définition 3.17. Soit ψ une fonction bornée sur $[0,1]$ et $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable. On définit *l'opérateur de multiplication* T_ψ par :

$$T_\psi(f) = f\psi,$$

et *l'opérateur de composition* C_φ par :

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi,$$

pour toute fonction f mesurable sur $[0,1]$. Nous dirons que φ est un *symbole* et ψ un *poids.*

En général, les espaces de Müntz ne sont pas stables par T_ψ ou par C_φ (voir le Théorème 3.23 et la Conjecture 2 à la fin de cette partie). Nous allons les étudier comme des opérateurs à valeurs dans L^p. Le premier résultat positif pour ces opérateurs est dû à I. Al Alam dans sa thèse [5] dans le cas $p = 1$.

Théorème 3.18. [5, Th. 4.2.11 et Th 4.2.15].
Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable satisfaisant :

(a) L'ensemble $E_\varphi = \varphi^{-1}(\{1\})$ est fini et inclus dans $(0,1)$.

(b) Il existe $\varepsilon > 0$ tel pour tout $x \in E_\varphi$, les fonctions $\varphi_{|[x-\varepsilon,x]}$, $\varphi_{|[x,x+\varepsilon]}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfont :

$$\varphi_g'(x) > 0 \quad \textit{et} \quad \varphi_d'(x) < 0,$$

où $\varphi_g'(x)$ est la dérivée à gauche et $\varphi_d'(x)$ la dérivée à droite en x.

(c) il existe $\alpha < 1$ tel que pour presque tout $y \in [0,1]$, on a

$$\mathrm{dist}(y, E_\varphi) \geq \varepsilon \Longrightarrow \varphi(y) \leq \alpha.$$

Alors $C_\varphi : M_\Lambda^1 \to L^1$ est un opérateur borné et non-compact. De plus pour toute fonction $\psi : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue sur E_φ, on a une expression de la norme essentielle de l'opérateur de composition à poids $T_\psi \circ C_\varphi : M_\Lambda^1 \to L^1$ donnée par la formule :

$$\|T_\psi \circ C_\varphi\|_e = \sum_{x \in E_\varphi} \Big(\frac{1}{\varphi_g'(x)} + \frac{1}{|\varphi_d'(x)|} \Big) \psi(x)\cdot$$

I. Al Alam et P. Lefèvre ont ensuite généralisé le Théorème 3.18 en 2014, pour certains symboles φ tels que E_φ est infini (voir [8, Th. 3.10, Cor. 3.11]).

Nous rappelons la définition de la mesure image :

Définition 3.19. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable et ν une mesure sur $[0,1]$. La *mesure image de ν par φ* est notée ν_φ, et elle est définie par :

$$\forall A \text{ borélien de } [0,1], \quad \nu_\varphi(A) = \nu(\varphi^{-1}(A)).$$

La mesure image satisfait la formule de transfert suivante :

$$\forall g \text{ mesurable}, \qquad \int_{[0,1]} |g \circ \varphi| d\nu = \int_{[0,1]} |g| d\nu_\varphi. \tag{3.1}$$

Cette formule est vraie pour les fonctions indicatrices par définition de ν_φ, et elle s'étend à toutes les fonctions mesurables par densité des fonctions en escalier dans $L^1(\nu_\varphi)$.

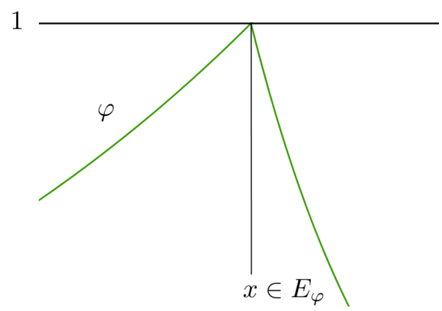

FIGURE 3.1 – Condition (b) quand φ touche le point 1.

Grâce à la mesure image, on peut voir les opérateurs de composition à poids comme des mesures de Carleson.

Proposition 3.20. [18, Lemme 8.1] *Soient* $p \in [1, +\infty)$, $\psi \in L^\infty$ *un poids,* $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ *un symbole mesurable et* M^p_Λ *un espace de Müntz. Soit* ν *la mesure à densité définie par* $d\nu = \psi(t)dt$, *et soit* $\mu = \nu_\varphi$ *la mesure image de* ν *par* φ*. Alors,*

1) *L'opérateur* $T_\psi \circ C_\varphi : M^p_\Lambda \to L^p$ *est borné* $\Longleftrightarrow \mu \in Car(M^p_\Lambda)$.
2) *L'opérateur* $T_\psi \circ C_\varphi : M^p_\Lambda \to L^p$ *est compact* $\Longleftrightarrow J_{\mu,p}$ *est compact.*

De plus on a

$$\|T_\psi \circ C_\varphi\| = \|J_{\mu,p}\|,$$

ainsi que

$$\|T_\psi \circ C_\varphi\|_e = \|J_{\mu,p}\|_e.$$

Ces équivalences viennent directement de la formule (3.1), et elles permettent d'étudier les opérateurs de composition à poids avec les outils qu'on a introduits en début de chapitre.

Exemple 3.21. Nous pouvons retrouver l'équivalent de [8, Prop. 3.3] avec des mesures de Carleson : si $C_\varphi : M^p_\Lambda \to L^p$ est borné, alors $E_\varphi = \varphi^{-1}(\{1\})$ est de mesure nulle. En effet, c'est une conséquence directe de la Proposition 3.4, car si $\lambda_\varphi \in Car(M^p_\Lambda)$ alors elle satisfait

$$\lambda_\varphi(\{1\}) = 0.$$

En 2012, les auteurs de [18] ont retrouvé les résultats du Théorème 3.18 dans [18, Prop. 8.4], en utilisant le point de vue des mesures de Carleson. Ils ont remarqué que sous les hypothèses $(a), (b), (c)$, il existe $\alpha' \in [\alpha, 1)$ tel que la mesure image μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[\alpha', 1]$ et sa densité est bornée, c'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.22. [18, Lemme 8.2] *Supposons que* $[a, b] \subset [0, 1]$ *et que* $\varphi^{-1}([a, b])$ *est l'union de* m *intervalles* $([x_i, y_i])_{i=1}^m$ *qui ont au plus un point extrémal en commun, et tel que pour tout* $i \in \{1, \dots, m\}$, *la restriction* $\varphi_i = \varphi_{|[x_i,y_i]}$ *satisfait* $\varphi_i'(x) \neq 0$. *Alors la restriction de* $\mu = \nu_\varphi$ *à* $[a, b]$ *est absolument continue, et sa densité est :*

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi(\varphi_i^{-1}(x))}{\varphi_i'(\varphi_i^{-1}(x))}.$$

Alors d'après la Proposition 3.8, on obtient $T_\psi \circ C_\varphi : M^p_\Lambda \to L^p$ est borné, et grâce à la Proposition 3.9, sa norme essentielle est donnée par $h(1)^{1/p}$.

Pour finir cette partie nous allons parler de résultats de non-stabilité de l'espace de Müntz par les opérateurs de multiplication et de composition.

Théorème 3.23. *Soient* Λ *une suite satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition,* $p \in [1, +\infty)$ *et* $\psi \in L^\infty$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout polynôme de Müntz* $f \in M(\Lambda)$, *on a* $T_\psi(f) \in M^p_\Lambda$.

(*ii*) ψ *est constante.*

Démonstration. Il est clair que $(ii) \Rightarrow (i)$. Supposons par l'absurde, que ψ n'est pas constante et qu'elle satisfait : $\psi f \in M^p_\Lambda$ pour tout polynôme $f \in M(\Lambda)$. Comme $t^{\lambda_0} \in M(\Lambda)$, alors $T_\psi(t^{\lambda_0}) = \psi t^{\lambda_0} \in M^p_\Lambda$. D'après le théorème de Clarkson-Erdös, il existe une suite $(u_n)_n \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall t \in [0,1), \quad \psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{\lambda_n - \lambda_0}.$$

Par hypothèse, il existe $k \neq 0$ tel que $u_k \neq 0$ car ψ est non constante. Désormais nous montrons par récurrence, que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_k + j(\lambda_k - \lambda_0) \in \Lambda$. Pour $j = 0$, le résultat est clair car $\lambda_k \in \Lambda$. Posons $\alpha := \lambda_k + j(\lambda_k - \lambda_0)$, et supposons que $\alpha \in \Lambda$. Comme $t^\alpha \in M(\Lambda)$ et ψ est un multiplicateur de l'espace de Müntz, on a $T_\psi(t^\alpha) = \psi t^\alpha \in M^p_\Lambda$. On obtient pour tout $t \in [0,1)$:

$$\psi(t)t^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^{\lambda_n - \lambda_0} t^\alpha = u_k t^{\lambda_k - \lambda_0 + \alpha} + \sum_{n \neq k} u_n t^{\lambda_n - \lambda_0 + \alpha}.$$

D'après le théorème de Clarkson-Erdös, ψt^α se représente comme une série $\sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda t^\lambda$ sur $[0,1)$, et il est facile de remarquer qu'une telle écriture est unique. Ainsi comme $u_k \neq 0$, on obtient $(\lambda_k - \lambda_0) + \alpha \in \Lambda$, et ainsi on conclut l'argument de récurrence. Rappelons que $(\lambda_k - \lambda_0) \neq 0$ car $k \neq 0$, et ainsi Λ contient une progression arithmétique. On a alors :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} \geq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k + j(\lambda_k - \lambda_0)} = +\infty,$$

ce qui est absurde par hypothèse, et donc les seuls multiplicateurs de l'espace de Müntz sont les fonctions constantes. $\square$

Ainsi, les espaces de Müntz n'admettent (presque) pas de multiplicateurs. Ce résultat s'inspire de certains travaux de I. Al Alam [4] et W. Noor [42], qui ont démontré des résultats de non-stabilité des espaces de Müntz par les opérateurs de composition. Nous allons l'énoncer sous la forme d'une conjecture.

Conjecture 2. Soit Λ une suite satisfaisant le critère de Müntz et la gap-condition, soit $p \in [1,+\infty)$ et $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable non constante qui satisfait :

$$\forall f \in M(\Lambda), \quad C_\varphi(f) \in M^p_\Lambda.$$

Alors φ est un monôme et Λ a une forme très particulière : il existe deux constantes $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in \mathbb{R}_+$ telles que $\varphi = \alpha t^\beta$, et Λ satisfait $\beta\Lambda \subset \Lambda$.

Remarque 3.24. Dans [3] l'auteur démontre la conjecture lorsque Λ est inclus dans $\mathbb{N}$ et φ est un polynôme. Puis des réponses plus générales apparaissent dans [42], l'auteur démontre que la conjecture est vraie dans les cas suivants :

1) Lorsque Λ contient une infinité d'entiers et φ est un polynôme à exposants réels.
2) Lorsque φ est un polynôme (à exposants réels) avec deux termes.

Exemple 3.25. Les opérateurs C_ρ de composition par une homothécie de rapport ρ, aussi appelés les opérateurs de blow-up. Ces opérateurs sont un outil utilisé par V. Gurariy et W. Lusky [31] pour démontrer beaucoup de résultats généraux dans les espaces de Müntz, mais ils les ont appelé "T_ρ". Pour $\rho \in (0,1)$ et f mesurable sur $[0,1]$, on définit :

$$f_\rho(t) = f(\rho t),$$

pour presque tout $t \in [0,1]$. Alors l'opérateur

$$C_\rho : \begin{cases} M^1_\Lambda & \longrightarrow & M^\infty_\Lambda \\ f & \longmapsto & f_\rho, \end{cases}$$

est borné et compact. En effet, d'une part on a pour presque tout $t \in [0,1)$,

$$C_\rho(f)(t) = \sum_n a_n \rho^{\lambda_n} t^{\lambda_n},$$

on vérifie aisément que $\|C_\rho(f)\| \leq \left(\frac{1}{\rho}\right)^{1/p} \|f\|_p$. Le théorème de Clarkson-Erdös entraîne que les opérateurs C_ρ sont bien définis et bornés (voir Prop.1.20). De plus, pour toute suite bornée $(f_n) \in M^1_\Lambda$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge uniformément sur $[0,\rho]$. Alors $(C_\rho(f_{n_k}))_k$ converge uniformément sur $[0,1]$, et ainsi $C_\rho : M^1_\Lambda \to M^\infty_\Lambda$ est compact. De plus, les opérateurs $C'_\rho : M^p_\Lambda \to M^p_\Lambda$ sont aussi compacts car ce sont les opérateurs C_ρ composés avec des inclusions bornées.

Exemple 3.26. Soit $\Lambda = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ définie par $\varphi(t) = t^3$. Alors L'opérateur $C_\varphi : M^2_\Lambda \to M^2_\Lambda$ est borné. Comme la suite $(3^n)_n$ est lacunaire, d'après le théorème de Gurariy-Macaev, la famille $(g_n)_n \in M^2_\Lambda$ définie par $g_n(t) = 3^{n/2} t^{3^n}$ est une base de Riesz de M^2_Λ. De plus, on a

$$C_\varphi(g_n) = \frac{1}{\sqrt{3}} g_{n+1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sur ℓ^2, on définit l'opérateur de shift à droite $S : \ell^2 \to \ell^2$ par :

$$S(a_0, a_1, \ldots) = (0, a_0, a_1, \ldots).$$

Comme $(g_n)_n$ est une base de Riesz de M^2_Λ, il existe un isomorphisme $\Theta : \ell^2 \to M^2_\Lambda$ tel que $\Theta(e_n) = g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc pour tout $a = (a_n) \in \ell^2$:

$$\begin{aligned} C_\varphi \circ \Theta\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n C_\varphi(g_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g_{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Theta \circ S\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\Big). \end{aligned}$$

Ainsi on a $C_\varphi \circ \Theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Theta \circ S$, et donc C_φ est conjugué à $\dfrac{1}{\sqrt{3}} S$.

3.2 Mesures de Carleson quand Λ est lacunaire

Dans cette partie, nous supposons que μ est une mesure finie et positive sur $[0,1)$, et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite lacunaire au sens de Hadamard, c'est à dire :

$$\exists r > 1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{n+1} \geq r\lambda_n.$$

Soit $q \in [1, +\infty)$, d'après le théorème de Gurariy-Macaev (voir Cor. 1.28) on a :

$$\|f\|_q \approx \Big(\sum_n \frac{|a_n|^q}{\lambda_n}\Big)^{\frac{1}{q}},$$

pour toute fonction $f \in M(\Lambda)$ de la forme $f(t) = \sum_n a_n t^{\lambda_n}$, et les constantes sous-jacentes ne dépendent que de Λ et q. En particulier, cette formule donne une minoration de $\|f\|_q$ que nous allons utiliser pour estimer les nombres d'approximation de l'opérateur $J_{\mu,q} : M_\Lambda^q \subset L^q(\mu)$. Les résultats de cette section ont été obtenus en collaboration avec P. Lefèvre et apparaissent dans [25].

3.2.1 Bornitude de $J_{\mu,q}$

Pour chercher des mesures de Carleson de M_Λ^q, nous introduisons la condition suivante :

Définition 3.27. Soient $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$, $q \in [1,+\infty)$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante satisfaisant la condition de Müntz. On dit que μ satisfait *la condition* (B_q) si il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{q\lambda_n} d\mu \leq C\cdot \tag{B_q}$$

La condition (B_q) est nécessaire pour avoir $\mu \in Car(M_\Lambda^q)$ (voir la Proposition 3.4). C'est parce qu'une mesure μ satisfait (B_q) si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\|t^{\lambda_n}\|_{L^q(\mu)}}{\|t^{\lambda_n}\|_q} \leq M.$$

Quand Λ est lacunaire, la condition (B_q) est "presque suffisante". Traitons tout d'abord le cas $q = 1$.

Théorème 3.28. *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_n$ une suite lacunaire et $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) μ satisfait la condition (B_1) ;

(ii) $\mu \in Car(M_\Lambda^1)$.

De plus il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ qui dépend uniquement de Λ telle que

$$\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\Big) \leq \|J_{\mu,1}\| \leq C\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\Big)\cdot$$

Démonstration. L'inégalité de gauche est une conséquence directe du calcul qu'on a fait dans la Proposition 3.4 : on l'obtient en testant les monômes t^{λ_n}. Nous montrons maintenant l'inégalité de droite. Pour $f = \sum_n b_n t^{\lambda_n} \in M(\Lambda)$ on a :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(\mu)} &= \int_0^1 \Big|\sum_n b_n t^{\lambda_n}\Big| d\mu \\ &\leq \sum_n |b_n| \frac{1}{\lambda_n + 1}\Big(\sup_n \lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\Big).\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la minoration du théorème de Gurariy-Macaev (voir Cor. 1.28), on a

$$\sum_n \frac{|b_n|}{\lambda_n} \leq \frac{1}{C_1}\|f\|_1,$$

où C_1 ne dépend que de Λ. On obtient donc $\|J_{\mu,1}\| \leq 1/C_1\Big(\sup_n \lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\Big)$. □

Le cas $q = 1$ est facile car l'inégalité triangulaire donne la bonne majoration de $\|f\|_1$. On obtient même une caractérisation des mesures de Carleson de M^1_Λ, mais la démarche se complique quand $q > 1$. Pour traiter ce cas, nous introduisons la suite de moments généralisés de μ suivante :

Définition 3.29. Pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$, un réel $q \in [1,+\infty)$, un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$D_{n,q}(\mu) = \left(\int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n}\Big(\sum_{k\geq 0} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\Big)^{q-1} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.2}$$

Cette suite dépend aussi de Λ et elle prend (a priori) ses valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Il s'agit de la même suite que dans la Définition 1.63, en fixant la suite de poids $w' = (w'_n)_n = (\lambda_n^{-1})$ qui ne dépend que de Λ. On a alors :

$$D_{n,q}(\mu) = D_n^{w',\Lambda}(\mu, q),$$

avec les notations de 1.63. Comme Λ et q seront fixés dans cette partie, la suite de poids w' est fixée aussi : on peut donc alléger la notation générale des moments généralisés. Cette suite est très utile grâce au lemme suivant :

Lemme 3.30. *Soit $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et $q \in [1,+\infty)$. Si $(D_{n,q}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors on a :*

$$\forall a \in c_{00}, \quad \Big\|\sum_{n\geq 0} a_n t^{\lambda_n}\Big\|_{L^q(\mu)} \leq \Big(\sum_{n\geq 0} \frac{|a_n|^q}{\lambda_n} D_{n,q}(\mu)^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Soit $w' = (w'_n)_n$ la suite de poids définie par $w'_n = \lambda_n^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme on a $D_n^{w',\Lambda}(\mu, q) = D_{n,q}(\mu)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la Proposition 1.64 donne directement le résultat. □

Le Lemme 3.30 est vrai en toute généralité pour Λ, mais il n'est "exploitable" que lorsque Λ est lacunaire (on pourra voir la Remarque 2.11 pour s'en convaincre). Nous allons maintenant établir le principal théorème de cette partie :

Théorème 3.31. *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite r-lacunaire, $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et $p \in [1,+\infty)$. Si μ satisfait (B_p) alors μ est une mesure de Carleson pour M^q_Λ pour tout $q > p$. De plus, on a*

$$\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1)} (q\lambda_n + 1) t^{q\lambda_n} d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \|J_{\mu,q}\| \leq C\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

où C ne dépend que de p, q et Λ.

L'essence de ce théorème est contenue dans l'estimation suivante :

Lemme 3.32. *Sous les hypothèses du Th.3.31, on a*

$$D_{n,q}(\mu)^q \leq C\Big(\sup_{k\geq n} \lambda_k \int_{[0,1)} t^{p\lambda_k} d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \int_{[0,1)} t^{p\lambda_k} d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}},$$

où C est une constante qui ne dépend que de p, q et r.

Démonstration. Comme $(\lambda_k)_k$ est r-lacunaire, pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\sum_{k\le n} \lambda_k^{\beta} \le \frac{1}{1-r^{-\beta}}\lambda_n^{\beta} \quad \text{et} \quad \sum_{k>n} \lambda_k^{-\beta} \le \frac{1}{r^{\beta}-1}\lambda_n^{-\beta}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $M_j = \lambda_j \int_{[0,1)} t^{p\lambda_j} d\mu$ et $M = \sup_j M_j < +\infty$. Étant donné que $q > 1$, on a pour tous $A, B \in \mathbb{R}_+$, $(A+B)^{q-1} \le 2^{q-1}(A^{q-1} + B^{q-1})$. Cela entraîne :

$$\begin{aligned} D_{n,q}(\mu)^q &= \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\Big)^{q-1} d\mu \\ &\lesssim \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \Big(\sum_{k\le n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\Big)^{q-1} d\mu + \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\Big)^{q-1} d\mu \end{aligned}$$

On va d'abord majorer le premier terme. Si $p > 1$, l'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \big(\sum_{k\le n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\big)^{q-1} d\mu &\le \lambda_n^{\frac{1}{q}} \Big(\int t^{p\lambda_n} d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int \big(\sum_{k\le n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\big)^{p'(q-1)} d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &\le M_n^{\frac{1}{p}} \lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k\le n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} \|t^{\lambda_k}\|_{L^{p'(q-1)}(\mu)}\Big)^{q-1} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire comme $p'(q-1) \ge p \ge 1$. Pour tout $k \le n$ on a $\int_{[0,1)} t^{p'(q-1)\lambda_k} d\mu \le \int_{[0,1)} t^{p\lambda_k} d\mu \le M_k \lambda_k^{-1}$. Cela entraine :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \big(\sum_{k\le n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\big)^{q-1} d\mu &\le \sup_{k\le n} M_k^{\frac{1}{p'}} M_n^{\frac{1}{p}} \lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k\le n} \lambda_k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p'(q-1)}}\Big)^{q-1} \\ &\lesssim \sup_{k\le n} M_k^{\frac{1}{p'}} M_n^{\frac{1}{p}} \lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lambda_n^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'}} \\ &= \sup_{k\le n} M_k^{\frac{1}{p'}} M_n^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Si $p = 1$, l'inégalité triangulaire et $t^{\lambda_k} \le 1$ impliquent directement :

$$\int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \big(\sum_{k\le n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\big)^{q-1} d\mu \le M_n \lambda_n^{-1} \lambda_n^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{k\le n} \lambda_k^{\frac{1}{q}}\Big)^{q-1} \lesssim M_n.$$

Pour le second terme on traite deux cas. Tout d'abord, si $q - 1 \ge p$ on applique l'inégalité triangulaire et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\Big)^{q-1} d\mu &\le \lambda_n^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{k>n} \|\lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k}\|_{L^{q-1}(t^{\lambda_n}\mu)}\Big)^{q-1} \\ &= \lambda_n^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{[0,1)} t^{(q-1)\lambda_k+\lambda_n} d\mu\Big)^{\frac{1}{q-1}}\Big)^{q-1} \\ &\le \lambda_n^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{[0,1)} t^{p\lambda_k} d\mu\Big)^{\frac{1}{q-1}}\Big)^{q-1} \\ &\le \sup_{k>n} M_k \lambda_n^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q-1}}\Big)^{q-1} \\ &\lesssim \sup_{k>n} M_k \lambda_n^{\frac{1}{q}} \big(\lambda_n^{\frac{-1}{q(q-1)}}\big)^{q-1} = \sup_{k>n} M_k. \end{aligned}$$

Si maintenant on suppose $q-1<p$, on pose $\alpha = \dfrac{p}{p-(q-1)}\cdot$ Le nombre α satisfait $\alpha > q$ et $(q-1)\alpha' = p$. L'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k} \Big)^{q-1} d\mu \\
&\qquad \le \lambda_n^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{[0,1)} t^{\alpha\lambda_n} d\mu \Big)^{\frac{1}{\alpha}} \Big(\int_{[0,1)} (\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k})^p d\mu \Big)^{\frac{1}{\alpha'}} \\
&\qquad \le M_n^{\frac{1}{\alpha}} \lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\alpha}} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big)^{\frac{p}{\alpha'}}
\end{aligned}$$

où on a encore appliqué l'inégalité triangulaire. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k} \Big)^{q-1} d\mu &\le M_n^{\frac{1}{\alpha}} \Big(\sup_{k>n} M_k^{\frac{1}{\alpha'}} \Big) \lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\alpha}} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \Big)^{q-1} \\
&\lesssim M_n^{\frac{1}{\alpha}} \Big(\sup_{k>n} M_k^{\frac{1}{\alpha'}} \Big).
\end{aligned}$$

Et finalement on a :

$$D_{n,q}(\mu)^q \lesssim M_n^{\frac{1}{p}} \Big(\sup_{k\le n} M_k^{\frac{1}{p'}} \Big) + \sup_{k\ge n} M_k,$$

et les constantes sous-jacentes ne dépendent que de p, q et r. □

Démonstration. du Théorème 3.31. L'estimation inférieure de $\|J_{\mu,q}\|$ est immédiate en testant les monômes (voir la Proposition 3.4). Pour l'estimation supérieure, on fixe une fonction $f \in M(\Lambda)$ de la forme $f(t) = \sum_n b_n t^{\lambda_n}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mu)} &= \Big(\int_0^1 \Big| \sum_n b_n t^{\lambda_n} \Big|^q d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \Big(\sum_n \frac{|b_n|^q}{\lambda_n} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sup_n D_{n,q}(\mu) \Big),
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.30. Comme Λ est lacunaire, on peut appliquer la minoration du théorème de Gurariy-Macaev (voir le Cor. 1.28), qui donne

$$\Big(\sum_n \frac{|b_n|^q}{\lambda_n} \Big)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{C_1} \|f\|_q,$$

où C_1 ne dépend que de Λ. Ainsi, d'après le Lemme 3.32, on obtient

$$\|f\|_{L^q(\mu)} \le \frac{1}{C_1} \cdot C \Big(\sup_n \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

où C, C_1 ne dépendent que de Λ, p, et q. □

Corollaire 3.33. *Soient Λ une suite lacunaire, $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et $p, q \in [1, +\infty)$, tels que $p < q$. Alors on a :*

1) *Si $\mu \in Car(M_\Lambda^p)$, alors $\mu \in Car(M_\Lambda^q)$.*
2) *En général, l'inclusion $Car(M_\Lambda^p) \subset Car(M_\Lambda^q)$ est stricte.*

Démonstration. Si μ est une mesure de Carleson de M_Λ^p, alors elle satisfait la condition (B_p), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\big(\lambda_n \widehat{\mu}(p\lambda_n)\big)^{1/p} \le \|J_{\mu,p}\|$. D'après le Théorème 3.31, on en déduit $\mu \in Car(M_\Lambda^q)$ et :

$$\|J_{\mu,q}\| \le C \|J_{\mu,p}\|^{\frac{p}{q}},$$

où C est une constante qui ne dépend que de p, q et Λ. Les exemples 3.50 et 3.51 dans la suite illustrent le point 2) : pour tout $p > 1$, il existe une suite Λ (super-lacunaire) et une mesure μ (non sous-linéaire) telles que pour tout $r \in [1, +\infty)$, $J_{\mu,r}$ est borné si et seulement si $r \geq p$. En particulier pour tout $q \geq p$, la mesure μ est une mesure de Carleson de M_Λ^q et pas de M_Λ^p. □

Remarque 3.34. En général même dans le cas lacunaire, l'ensemble des mesures de Carleson de M_Λ^p dépend de p et pas seulement de Λ. Les premiers à avoir remarqué ce phénomène sont W. Noor et D. Timotin : ils ont construit une mesure μ et une suite Λ lacunaire tels que $\mu \in Car(M_\Lambda^2)$ et $\mu \notin Car(M_\Lambda^1)$ (voir [43, Ex. 7.1]). Nos exemples 3.50 et 3.51 sont inspirés de leur construction.

Le Théorème 3.31 a une deuxième conséquence importante, c'est une réponse positive à une question posée dans [43] : si Λ est lacunaire, alors les mesures sous-linéaires sont des mesures de Carleson de M_Λ^p .

Corollaire 3.35. *Soient Λ une suite lacunaire, $p \in [1, +\infty)$ et $\mu \in \mathcal{M}^+([0, 1))$.*

1) Si μ est sous-linéaire, alors $\mu \in Car(M_\Lambda^p)$.

2) Si de plus Λ est sous-géométrique, alors on a :

$$\mu \textit{ est sous linéaire } \iff \mu \in Car(M_\Lambda^p).$$

Démonstration. D'après la Remarque 1.59, toute mesure sous-linéaire μ satisfait la condition (B_1). D'après les Théorèmes 3.28 et 3.31, on a $\mu \in Car(M_\Lambda^p)$ pour tout $p \in [1, +\infty)$. De plus, il existe une constante C qui ne dépend que de p et Λ telle que :

$$\|J_{\mu,p}\| \leq C\|\mu\|_S^{\frac{1}{p}}.$$

Le point 2) est une conséquence du Corollaire 1.62, qui s'applique quand Λ est sous-géométrique. □

Remarque 3.36. Ce dernier corollaire peut se démontrer d'une manière beaucoup plus simple que le Lemme 3.32, nous présentons ici la preuve, due à V. Munnier. Soit $f \in M(\Lambda)$ de la forme $f(t) = \sum_n a_n t^{\lambda_n}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mu)}^p &= \int_{[0,1)} \Big| \sum_n a_n t^{\lambda_n} \Big|^p d\mu \\
&\leq \int_{[0,1)} \Big(\sum_n |a_n| t^{\lambda_n} \Big)^p d\mu.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \mapsto \big(\sum_n |a_n| t^{\lambda_n}\big)^p$ est croissante, on peut appliquer le Lemme 1.60, qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mu)}^p &\leq \|\mu\|_S \int_0^1 \Big(\sum_n |a_n| t^{\lambda_n} \Big)^p dt \\
&= \|\mu\|_S \Big\| \sum_n |a_n| t^{\lambda_n} \Big\|_p^p \\
&\leq \|\mu\|_S C_2^p \sum_n \frac{|a_n|^p}{p\lambda_n + 1} \\
&\leq \|\mu\|_S \frac{C_2^p}{C_1^p} \|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

en appliquant deux fois le théorème de Gurariy-Macaev. Ainsi on a $\|J_{\mu,p}\| \leq \frac{C_2}{C_1} \|\mu\|_S^{1/p}$.

Nous verrons dans la suite qu'on peut généraliser cette démarche quand Λ est quasi-lacunaire.

3.2.2 Compacité de $J_{\mu,q}$

Dans cette partie, nous cherchons des conditions suffisantes sur les mesures μ de Carleson de M_Λ^q pour que l'opérateur de plongement $J_{\mu,p}$ soit compact, dans le cas où Λ est lacunaire. Nous suivrons une démarche similaire à celle de la sous-section précédente, c'est pourquoi nous introduisons la classe de mesures suivante :

Définition 3.37. Soient $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$, $q \in [1,+\infty)$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante satisfaisant la condition de Müntz. On dit que μ satisfait *la condition* (b_q) si :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{q\lambda_n} d\mu = 0\cdot \tag{b_q}$$

D'après la Proposition 3.7, si μ est une mesure de Carleson compacte de M_Λ^q, alors μ satisfait la condition (b_q). Comme dans le cas de la bornitude, nous allons voir que la condition (b_q) est "presque suffisante" pour garantir la compacité de $J_{\mu,q}$, lorsque Λ est lacunaire. Traitons tout d'abord le cas $q = 1$.

Théorème 3.38. *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_n$ une suite lacunaire et $\mu \in Car(M_\Lambda^1)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) μ satisfait la condition (b_1).

(ii) L'opérateur $J_{\mu,1}$ est compact.

(iii) L'opérateur $J_{\mu,1}$ est faiblement compact.

De plus il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ qui dépend uniquement de Λ telle que

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\Big) \leq \|J_{\mu,1}\|_{e,w} \leq \|J_{\mu,1}\|_e \leq C \limsup_{n\to+\infty} \Big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\Big)\cdot$$

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les ensembles $A_k = (1-1/k, 1)$ et les mesures $\mu_k = \mu_{|[0,1-1/k]}$ et $\mu'_k = \mu_{|(1-1/k,1)}$. D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(\mu(A_k))_k$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$. D'après le Théorème 3.10, comme le support de μ_k est inclus dans un compact de $(0,1)$, l'opérateur $J_{\mu_k,1} = J_{\mu,1} - J_{\mu'_k,1}$ est compact pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient donc :

$$\|J_{\mu,1}\|_e \leq \limsup_{k\to+\infty} \|J_{\mu'_k,1}\| = \lim_{k\to+\infty} \|J_{\mu'_k,1}\|,$$

et la limite existe car $(\|J_{\mu'_k,1}\|)_k$ est une suite décroissante. Nous fixons maintenant $k \in \mathbb{N}$ grand. D'après le Théorème 3.28, il existe une constante C qui ne dépend que de Λ telle que :

$$\begin{aligned}
\|J_{\mu'_k,1}\| &\leq C \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\lambda_n \int_{A_k} t^{\lambda_n} d\mu\Big) \\
&\leq C \max\Big\{ \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \lambda_n \leq 1/\sqrt{\mu(A_k)}}} \lambda_n \int_{A_k} t^{\lambda_n} d\mu \ , \quad \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \lambda_n \geq 1/\sqrt{\mu(A_k)}}} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu \Big\} \\
&\leq C \max\Big\{ \sqrt{\mu(A_k)} \ , \quad \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \lambda_n \geq 1/\sqrt{\mu(A_k)}}} \lambda_n \widehat{\mu}(\lambda_n) \Big\}
\end{aligned}$$

Quand $k \to +\infty$ on a $\mu(A_k) \to 0$, on obtient donc

$$\lim_{k\to+\infty} \|J_{\mu'_k,1}\| \leq C \limsup_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu.$$

Pour montrer la minoration, nous appliquons le Théorème 1.49. Fixons $k \in \mathbb{N}$ et posons $\alpha = \limsup_{n\to+\infty} \lambda_n \widehat{\mu}(\lambda_n)$. En testant les fonction $(\lambda_n t^{\lambda_n}) \in M^1_\Lambda$, on a :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \int_{A_k} \lambda_n t^{\lambda_n} d\mu &= \limsup_{n\to+\infty} \Big(\lambda_n \widehat{\mu}(\lambda_n) - \int_{[0,1-\frac{1}{k}]} \lambda_n t^{\lambda_n} d\mu \Big) \\
&\geq \alpha - \Big(\lim_{n\to+\infty} \lambda_n (1-1/k)^{\lambda_n} \Big) \\
&= \alpha,
\end{aligned}$$

Comme les ensembles A_k satisfont $\mu(A_k) \to 0$ et la suite $(\lambda_n t^{\lambda_n})_n$ est dans la boule unité de M^1_Λ, on peut appliquer le Théorème 1.49 avec la suite $(h_n)_n = (\lambda_n t^{\lambda_n})_n$ et α. On obtient :

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu \Big) \leq \|J_{\mu,1}\|_{e,w} \leq \|J_{\mu,1}\|_e \leq C \limsup_{n\to+\infty} \Big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu \Big).$$

□

Nous traitons maintenant le cas $q > 1$ avec une démarche analogue au Théorème 3.31 adaptée pour le problème de la compacité. Nous allons utiliser la suite $(D_{n,q}(\mu))_n$ de moments généralisés définie de la même façon que dans la Définition 3.29 par :

$$D_{n,q}(\mu) = \Big(\int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \big(\sum_{k\geq 0} \lambda_k^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_k} \big)^{q-1} d\mu \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette suite satisfait la propriété suivante :

Lemme 3.39. *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite lacunaire, $q \in [1,+\infty)$, et $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$. Si la suite de moments généralisés $(D_{n,q}(\mu))_n$ est bornée, alors il existe une constante d qui dépend uniquement de Λ et de q telle que :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad a_{N+1}(J_{\mu,q}) \leq d \big(D_{N,q}(\mu) \big)^*,$$

où $a_{N+1}(J_{\mu,q})$ est le N-ième nombre d'approximation de $J_{\mu,q}$ et $D_{N,q}(\mu)^*$ est le N-ième terme de la suite réarrangée décroissante de $(D_{n,q}(\mu))_n$.

Démonstration. On pose $w' = (w'_n)_{n\geq 0}$ la suite de poids définie par $w'_n = \lambda_n^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D_{n,q}(\mu) = D_n^{w',\Lambda}(\mu,q)$, où $(D_n^{w',\Lambda}(\mu,q))_n$ est la suite que nous avons introduit plus généralement dans la Définition 1.63. En définissant l'opérateur $T^{w',\Lambda}_{\mu,q}$ suivant :

$$T^{w',\Lambda}_{\mu,q} : \begin{cases} \ell^q(w') & \longrightarrow & L^q(\mu) \\ b & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n t^{\lambda_n}, \end{cases}$$

on a $a_{N+1}(T^{w',\Lambda}_{\mu,q}) \leq \big(D_{N,q}(\mu) \big)^*$ d'après le Théorème 1.66. D'autre part, considérons la suite de poids $w(q) = (w_n(q))_n = \big((q\lambda_n + 1)^{-1} \big)_n$, et l'opérateur suivant :

$$T^\Lambda_q : \begin{cases} \ell^q(w(q)) & \longrightarrow & M^q_\Lambda \\ b & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n t^{\lambda_n}. \end{cases}$$

L'opérateur T^Λ_q est un isomorphisme d'après le théorème de Gurariy-Macaev (on pourra voir la Définition 2.2 pour plus de détails). C'est l'isomorphisme qu'on a étudié tout au long du chapitre 2. De plus comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $w_n(q) \leq w'_n \leq 2q w_n(q)$, alors l'identité

$i : \ell^q(w') \to \ell^q(w(q))$ est un isomorphisme. En posant $S = \left(T_q^\Lambda \circ i\right)^{-1}$, on peut factoriser $J_{\mu,q}$ comme suit :

$$\begin{tikzcd} M_\Lambda^q \arrow[rr, "J_{\mu,q}"] \arrow[dr, "S"'] & & L^q(\mu), \\ & \ell^q(w') \arrow[ur, "T_{\mu,q}^{w',\Lambda}"'] & \end{tikzcd}$$

et on obtient ainsi

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad a_{N+1}(J_{\mu,q}) \leq \big(D_{N,q}(\mu)\big)^* \Big\| \left(T_q^\Lambda \circ i\right)^{-1} \Big\|.$$

$\square$

Nous pouvons maintenant énoncer une condition suffisante de compacité :

Théorème 3.40. *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite lacunaire, une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et $p \in [1,+\infty)$. Si μ satisfait (B_p) alors pour tout $q > p$ on a :*

$$C_1 \limsup_{n\to+\infty} \Big(\lambda_n \widehat{\mu}(q\lambda_n)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \|J_{\mu,q}\|_e \leq C_2 \Big(\limsup_{n\to+\infty} \lambda_n \widehat{\mu}(p\lambda_n)\Big)^{\frac{1}{pq}} \Big(\sup_{n\geq 0} \lambda_n \widehat{\mu}(p\lambda_n)\Big)^{\frac{1}{p'q}},$$

où C_1, C_2 ne dépendent que de p, q et Λ. En particulier, si μ satisfait (b_p) alors $J_{\mu,q}$ est compact pour tout $q > p$.

Démonstration. Nous avons déjà démontré tous les outils nécessaires pour démontrer la majoration de la norme essentielle. En appliquant successivement les Lemmes 3.39 et 3.32, on a :

$$\begin{aligned}
\|J_{\mu,q}\|_e &\leq \lim_{N\to+\infty} a_{N+1}(J_{\mu,q}) \\
&\leq d \lim_{N\to+\infty} \big(D_{N,q}(\mu)\big)^* \\
&= d \limsup_{n\to+\infty} D_{n,q}(\mu) \\
&\leq Cd \Big(\limsup_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu\Big)^{\frac{1}{pq}} \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu\Big)^{\frac{1}{p'q}},
\end{aligned}$$

où C, d ne dépendent que de Λ, p et q. Pour démontrer la minoration de $\|J_{\mu,q}\|_e$, on va appliquer le Théorème 1.49 : pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = (1 - 1/k, 1) \subset [0,1)$ et $h_n = (q\lambda_n)^{\frac{1}{q}} t^{\lambda_n} \in M_\Lambda^q$. La suite h_n satisfait $\|h_n\|_q \leq 1$. En posant $\alpha = \limsup_{n\to+\infty} \|h_n\|_{L^q(\mu)}$, on a pour tout k fixé :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \Big(\int_{A_k} q\lambda_n t^{q\lambda_n} d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} &= \limsup_{n\to+\infty} \Big(\int_{[0,1)} q\lambda_n t^{q\lambda_n} d\mu - q\lambda_n \int_{[0,1-\frac{1}{k}]} t^{q\lambda_n} d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \Big(\alpha^q - \lim_{n\to+\infty} q\lambda_n (1-1/k)^{q\lambda_n}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \alpha,
\end{aligned}$$

et le Théorème 1.49 donne la minoration voulue avec $C_1 = q^{1/q}$. $\square$

Corollaire 3.41. *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite lacunaire, $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et $p, q \in [1,+\infty)$ tels que $p < q$. Alors on a :*

1) si $J_{\mu,p}$ est compact, alors $J_{\mu,q}$ est compact.

2) En général, la réciproque est fausse.

Démonstration. Soit μ une mesure telle que $J_{\mu,p}$ est compact. D'après la Proposition 3.7 alors μ satisfait alors la condition (b_p). Comme Λ est lacunaire, le Théorème 3.40 entraîne que $J_{\mu,q}$ est compact. $\square$

Corollaire 3.42. *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite lacunaire, $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et $p \in [1,+\infty)$. Alors on a :*

1) Si μ est sous-linéaire évanescente, alors $J_{\mu,p}$ est compact.

2) Si de plus Λ est sous-géométrique, alors on a :

$$\mu \text{ est sous linéaire } \iff \mu \in Car(M_\Lambda^p).$$

Démonstration. Si μ est sous-linéaire évanescente, alors elle satisfait la condition (b_1) (voir Rem. 1.59). D'après les Théorèmes 3.38 et 3.40, on a $J_{\mu,p}$ est compact pour tout $p \in [1,+\infty)$. Le point 2) est une conséquence du Corollaire 1.62, qui s'applique si Λ est sous-géométrique. $\square$

3.2.3 L'opérateur $J_{\mu,2}$: classes de Schatten

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas Hilbertien : pour $q > 0$, nous cherchons des conditions suffisantes pour que l'opérateur de plongement $J_{\mu,2} : M_\Lambda^2 \to L^2(\mu)$ soit dans la classe de Schatten $\mathcal{S}^q$. Dans l'article [43], W. Noor et D. Timotin ont trouvé des résultats intéressants à ce sujet (voir aussi [42]). Nous allons comme d'usage maintenant, utiliser les moments généralisés $(D_{n,2}(\mu))_n$, donnés par :

$$D_{n,2}(\mu) = \Big(\int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n} \sum_{k\geq 0} \lambda_k^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_k} d\mu \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons déjà énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.43. *Soient Λ une suite lacunaire, $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et $q \in (0,+\infty)$.*

1) Il existe une constante $d > 0$ qui dépend uniquement de q et Λ telle que

$$\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} \leq d \Big(\sum_{n\geq 0} D_{n,2}(\mu)^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

En particulier, si $(D_{n,2}(\mu))_n \in \ell^q$ alors $J_{\mu,2} \in \mathcal{S}^q$.

2) Dans le cas $q = 2$, il existe deux constantes $d_1, d_2 > 0$ telles que :

$$d_1 \Big(\sum_{n\geq 0} \|\lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n}\|^2_{L^2(\mu)} \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^2} \leq d_2 \Big(\sum_{n\geq 0} \|\lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n}\|^2_{L^2(\mu)} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. D'après le Lemme 3.39, il existe une constante $d \geq 0$ telle que les nombres d'approximation de $J_{\mu,2}$ satisfont :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad a_{N+1}(J_{\mu,2}) \leq d(D_{N,2}(\mu))^*,$$

où $(D_{N,2}(\mu))^*_N$ est le réarrangement décroissant de $(D_{n,2}(\mu))_n$. Si $(D_{n,2}(\mu)) \notin \ell^q$, alors le point 1) est évident. Sinon, on a en particulier $D_{n,2}(\mu) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Comme pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, D_{n,2}(\mu) > \varepsilon\}$ est fini, alors il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $D_{\varphi(N),2}(\mu) = (D_{N,2}(\mu))^*$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} &= \Big(\sum_{N\geq 0} a_{N+1}(J_{\mu,2})^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq d \Big(\sum_{N\geq 0} \big((D_{N,2}(\mu))^*\big)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= d \Big(\sum_{n\geq 0} D_{n,2}(\mu)^q \Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Pour montrer le point 2), nous considérons la suite $h_n = \left(\lambda_n^{1/2} t^{\lambda_n}\right) \in M_\Lambda^2$. D'après le théorème de Gurariy-Macaev, c'est une base de Riesz de M_Λ^2 (voir l'Exemple 1.24), il existe un isomorphisme $S : \ell^2 \to M_\Lambda^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S(e_n) = h_n$, où $(e_n)_n$ est la base canonique de ℓ^2. D'après le Théorème 1.40, la norme de Schatten de $J_{\mu,2} \circ S$ est donnée par : $\|J_{\mu,2} \circ S\|_{\mathcal{S}^2} = (\sum_{n\geq 0} \|J_{\mu,2}(S(e_n))\|^2)^{1/2}$. D'autre part, comme S est un isomorphisme, les nombres d'approximation satisfont $\frac{1}{\|S\|} a_n(J_{\mu,2} \circ S) \leq a_n(J_{\mu,2}) \leq \|S^{-1}\| a_n(J_{\mu,2} \circ S)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient donc :

$$\frac{1}{\|S\|}\Big(\sum_{n\geq 0} \big\|\lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n}\big\|^2_{L^2(\mu)}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^2} \leq \|S^{-1}\|.\Big(\sum_{n\geq 0} \big\|\lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n}\big\|^2_{L^2(\mu)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Remarque 3.44. Grâce à l'estimation qui précède, on retrouve [43, Th. 6.1] dans le cas lacunaire (leur résultat est vrai pour les suites quasi-lacunaires aussi). Soit $\beta > 1$, Λ une suite lacunaire et μ une mesure telle que $\mu([1-\varepsilon, 1)) = O(\varepsilon^\beta)$ quand $\varepsilon \to 0$. Alors pour tout $q > 0$, $J_{\mu,2}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}^q$.

En effet, pour une telle mesure nous pouvons estimer les moments généralisés $D_{n,2}(\mu)$. En appliquant successivement le Lemme 1.30 et la Proposition 1.61, il existe une constante C_2 telle que :

$$\begin{aligned}
\big(D_{n,2}(\mu)\big)^2 &= \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_k} d\mu \\
&\leq \lambda_n^{\frac{1}{2}} C_2 \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} (1-t)^{-\frac{1}{2}} d\mu \\
&\lesssim \lambda_n^{\frac{1}{2}} \int_0^1 t^{\lambda_n} (1-t)^{-\frac{3}{2}+\beta} dt,
\end{aligned}$$

car la fonction $t \mapsto t^{\lambda_n}(1-t)^{-1/2}$ est croissante positive. Soit ν la mesure absolument continue définie par $d\nu(t) = (1-t)^{-3/2+\beta} dt$. Elle satisfait $\nu([1-\varepsilon, 1))) = \frac{1}{\beta - 1/2} \varepsilon^{\beta - 1/2}$, donc d'après la Prop. 1.61 on obtient :

$$\begin{aligned}
D_{n,2}(\mu) &\lesssim \Big(\lambda_n^{\frac{1}{2}} \big(\frac{1}{\lambda_n}\big)^{\beta - \frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\frac{1}{\lambda_n^{\beta-1}}\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Comme $\beta > 1$, on obtient donc $\big(D_{n,2}(\mu)\big)_n \in \ell^q$ pour tout $q > 0$, et d'après le théorème 3.43 l'opérateur $J_{\mu,2}$ est dans toutes les classes de Schatten.

Nous rappelons le résultat très classique suivant, qui va nous être utile dans cette partie.

Lemme 3.45. (Test de Schur). *Soit $(A_{n,k})_{n,k}$ une matrice de nombres positifs. Pour $b \in c_{00}$, on définit la suite suivante :*

$$A(b) = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} b_k\Big)_n.$$

Si il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}\Big) \leq K$ et $\sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k}\Big) \leq K$, alors pour tout $p \in [1, +\infty)$ on a :

$$\forall b \in c_{00}, \quad \|A(b)\|_{\ell^p} \leq K \|b\|_{\ell^p}.$$

En particulier l'opérateur $A : \ell^p \to \ell^p$ est borné.

Le test de Schur est un résultat d'interpolation. On peut le voir comme une conséquence directe du théorème de Riesz Thorin car sous les hypothèse du Lemme 3.45, on vérifie aisément que $A : \ell^1 \to \ell^1$ et $A : \ell^\infty \to \ell^\infty$ sont bornés et de norme inférieure à K.

Le résultat suivant est une estimation analogue au Lemme 3.32 pour le problème de l'appartenance aux classes de Schatten.

Lemme 3.46. *Soit* $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ *une suite lacunaire. Alors pour tout* $q \in (0, +\infty)$, *il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour toute mesure* μ *sur* $[0,1]$, *on a :*

$$\Big(\sum_{n\geq 0} D_{n,2}(\mu)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C\Big(\sum_{n\geq 0} \big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\big)^{q/2}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on notera $m_j = \lambda_j \int_{[0,1)} t^{\lambda_j} d\mu$ pour alléger les expression dans les calculs.

$$\begin{aligned}
D_{n,2}(\mu)^2 &= \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_k}\Big) d\mu \\
&\leq \sum_{k\leq n} \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \lambda_k^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n} d\mu + \sum_{k>n} \int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \lambda_k^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_k} d\mu \\
&= m_n \sum_{k\leq n} \big(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\big)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k>n} m_k \big(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \big(A(M)\big)_n,
\end{aligned}$$

où $M = (m_k)_{k\geq 0}$ et $A = (A_{n,k})_{n,k}$ est la matrice définie par $A_{n,k} = \big(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\big)^{1/2}$ si $k > n$, $A_{n,n} = \sum_{k\leq n} (\frac{\lambda_k}{\lambda_n})^{1/2}$ et $A_{n,k} = 0$ si $k < n$. Comme Λ est r-lacunaire, on obtient :

$$\sup_n \sum_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} \leq \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{r}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{r}}} \quad \text{et} \quad \sup_k \sum_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k} \leq \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{r}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{r}}}.$$

D'après le Lemme 3.45, $A : \ell^{q/2} \to \ell^{q/2}$ est borné pour tout $q \geq 2$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} D_{n,2}(\mu)^q\Big)^{\frac{1}{q}} &\leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \big(A(M)\big)_n^{q/2}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|A(M)\|^2_{\ell^{q/2}} \\
&\leq \Big(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{r}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{r}}}\Big)\Big(\sum_{k\geq 0} \big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\big)^{q/2}\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Il reste à traiter le cas $q < 2$. Comme $\frac{q}{2} < 1$, on a :

$$\begin{aligned}
D_{n,2}(\mu)^q &\leq \Big(m_n \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{r}}} + \sum_{k>n} m_k \frac{1}{\sqrt{r}^{k-n}}\Big)^{q/2} \\
&\leq \Big(m_n^{\frac{1}{2}}\Big)^q \frac{1}{(1 - \frac{1}{\sqrt{r}})^{q/2}} + \sum_{k>n} \Big(m_k^{\frac{1}{2}}\Big)^q \frac{1}{r^{\frac{q(k-n)}{4}}}.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} D_{n,2}(\mu)^q &\leq \sum_{n\geq 0} \Big(m_n^{\frac{1}{2}}\Big)^q \Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{r}}}\Big)^{q/2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(m_k^{\frac{1}{2}}\Big)^q \sum_{n=0}^{k-1} \Big(\frac{1}{r}\Big)^{q(k-n)/4} \\
&\leq C \sum_{n\geq 0} \big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu\big)^{q/2},
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de q et r. $\square$

Théorème 3.47. *Soient $q \geq 2$ et Λ une suite quasi-géométrique. Alors il existe $A_1, A_2 \geq 0$ tel que :*

$$A_1 \Big\| \Big(\|\lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n}\|_{L^2(\mu)} \Big)_n \Big\|_{\ell^q} \leq \|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} \leq A_2 \Big\| \Big(\|\lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n}\|_{L^2(\mu)} \Big)_n \Big\|_{\ell^q},$$

il existe $B_1, B_2 \geq 0$ tel que :

$$B_1 \Big\| \big(D_{n,2}(\mu) \big)_n \Big\|_{\ell^q} \leq \|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} \leq B_2 \Big\| \big(D_{n,2}(\mu) \big)_n \Big\|_{\ell^q},$$

et il existe $C_1, C_2 \geq 0$ tel que :

$$C_1 \Big\| \Big(\big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu \big)^{\frac{1}{2}} \Big)_n \Big\|_{\ell^q} \leq \|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} \leq C_2 \Big\| \Big(\big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu \big)^{\frac{1}{2}} \Big)_n \Big\|_{\ell^q},$$

pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$.

Démonstration. D'après le Théorème 3.43 et le Lemme 3.46, on a :

$$\begin{aligned} \|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} &\leq d \Big(\sum_{n \geq 0} D_{n,2}(\mu)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq dC \Big(\sum_{n \geq 0} \big(\lambda_n \int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu \big)^{q/2} \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= dC \big\| (m_n^{\frac{1}{2}})_n \big\|_{\ell^q}, \end{aligned}$$

où $m_n = \big(\int_{[0,1)} t^{\lambda_n} d\mu \big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme Λ est sous-géométrique, on pose $r = \inf_n \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$ et $\sup_n (\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}) = R < +\infty$. Soit $K \in \mathbb{N}$ tel que $r^K \geq 2$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} m_{n+K}^{\frac{1}{2}} &= \lambda_{n+K}^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{[0,1)} t^{\lambda_{n+K}} d\mu \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq R^{K/2} \Big(\int_{[0,1)} \lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{r^K \lambda_n} d\mu \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq R^{K/2} \|\lambda_n^{\frac{1}{2}} t^{\lambda_n}\|_{L^2(\mu)}. \end{aligned}$$

Rappelons que la suite $(h_n)_n = (\lambda_n^{1/2} t^{\lambda_n})_n$ est une base de Riesz de M_Λ^2 d'après le théorème de Gurariy-Macaev : c'est à dire qu'il existe un isomorphisme $S : \ell^2 \to M_\Lambda^2$ satisfaisant $S(e_n) = h_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme S est un isomorphisme, les nombres d'approximation satisfont $\frac{1}{\|S\|} a_n(J_{\mu,2} \circ S) \leq a_n(J_{\mu,2}) \leq \|S^{-1}\| a_n(J_{\mu,2} \circ S)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, comme $q \geq 2$, on a la minoration suivante de la norme de Schatten, donnée par le théorème 1.40 :

$$\begin{aligned} \|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} &\geq \frac{1}{\|S\|} \Big(\sum_{n \geq 0} \big\| J_{\mu,2} \circ S(e_n) \big\|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{\|S\|} \Big(\sum_{n \geq 0} \|\lambda_n^{1/2} t^{\lambda_n}\|_{L^2(\mu)}^q \Big)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

et la boucle est bouclée. □

Nous avons obtenu la minoration de la norme de $\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q}$ en évaluant la norme ℓ^q d'une suite $\big(\|J_{\mu,2}(h_n)\|_{L^2(\mu)} \big)_n$, pour une base de Riesz $(h_n) \in M_\Lambda^2$ grâce au Théorème 1.40 (voir [21, Th. 4.6]). Malheureusement, ce résultat n'est valide que lorsque $q \geq 2$. Nous allons tout de même formuler la conjecture suivante :

Conjecture 3. Soient $q > 0$, $\mu \in \mathcal{M}^+([0,1))$ et Λ une suite lacunaire, sous-géométrique. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} \geq C \Big\| \big(D_{n,2}(\mu) \big)_n \Big\|_{\ell^q}.$$

Beaucoup d'éléments mènent à penser que nombres d'approximation de $J_{\mu,2}$ et les nombres $D_{n,2}(\mu)$ satisfont une inégalité inverse à celle donnée par le Lemme 3.39 si Λ est sous-géométrique, mais nous n'avons pas réussi à le démontrer.

Dans le cas sous-géométrique et $q \geq 2$, nous avons aussi une estimation intégrale de la norme de Schatten.

Proposition 3.48. *Soient Λ une suite quasi-géométrique et $q \geq 2$. On a :*

$$\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} \approx \left(\int_0^1 \Big(\int_{[0,1)} \frac{d\mu(t)}{(1-st)^{\frac{2}{q}+1}} \Big)^{q/2} ds \right)^{\frac{1}{q}},$$

où les constantes sous-jacentes ne dépendent que de q et Λ (mais pas de μ).

Démonstration. Nous allons noter $b_n = \|\lambda_n^{1/2} t^{\lambda_n}\|_{L^2(\mu)}$. D'après le Théorème 3.47, et comme $q \geq 2$, les quantités $\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q}$ et $\|b\|_{\ell^q}$ sont équivalentes, à des constantes dépendant uniquement de Λ près. D'autre part, d'après le Théorème de Gurariy-Macaev dans $\ell^{q/2}$ (voir Cor 1.28), on a un équivalent intégral de $\|b\|_{\ell^q}$:

$$\begin{aligned}
\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} &\approx \left\| \big(b_n^2\big)_n \right\|_{\ell^{q/2}}^{\frac{1}{2}} \\
&\approx \Big\| \sum_{n\geq 0} b_n^2 \lambda_n^{\frac{2}{q}} s^{\lambda_n} \Big\|_{L^{q/2}(ds)}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \Big(\sum_{n\geq 0} \lambda_n \int_{[0,1)} t^{2\lambda_n} d\mu(t) \lambda_n^{\frac{2}{q}} s^{\lambda_n} \Big)^{q/2} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^1 \Big(\int_{[0,1)} \sum_{n\geq 0} \lambda_n^{\frac{2}{q}+1} (st^2)^{\lambda_n} d\mu(t) \Big)^{q/2} ds \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.30, on peut exprimer la quantité $\sum_{n\geq 0} \lambda_n^{\frac{2}{q}+1} (st^2)^{\lambda_n}$ pour tous $s, t \in (0,1)$, et on obtient :

$$\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^q} \approx \left(\int_0^1 \Big(\int_{[0,1)} \frac{d\mu(t)}{(1-st)^{\frac{2}{q}+1}} \Big)^{q/2} ds \right)^{\frac{1}{q}}.$$

car pour tout $s, t \in [0,1]$, on a $(1-st) \leq (1-st^2) \leq (1+st)(1-st) \leq 2(1-st)$. □

Notons que le critère précédent est le même pour toutes les suites Λ lacunaires et sous-géométriques. En particulier, on obtient alors une caractérisation des mesures telles que $J_{\mu,2}$ est un opérateur de Hilbert Schmidt dans cette classe de suites Λ.

Corollaire 3.49. *Soit Λ une quasi-géométrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $J_{\mu,2}$ *est un opérateur de Hibert-Schmidt ;*

(ii) $\displaystyle\int_{[0,1)} \frac{1}{1-t} d\mu < +\infty$ *;*

Dans ce cas, on a $\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^2} \approx \Big(\displaystyle\int_{[0,1)} \frac{1}{1-t} d\mu \Big)^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. En appliquant la Proposition 3.48 dans le cas $q = 2$, on a une estimation intégrale de $\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^2}$, et le théorème de Fubini donne directement :

$$\|J_{\mu,2}\|_{\mathcal{S}^2}^2 \approx \int_{t\in[0,1)} \int_0^1 \frac{ds}{(1-st)^2} d\mu(t) = \int_{[0,1)} \frac{1}{1-t} d\mu.$$

□

3.2.4 Exemples

Dans cette partie, nous présentons deux exemples qui montrent d'une manière constructive, qu'en général l'ensemble des mesures de Carleson de M^p_Λ dépend de p, et pas seulement de Λ. Les constructions sont inspirées de [43].

Exemple 3.50. Soit $p \in [1,+\infty)$. Nous allons construire une suite lacunaire Λ et une mesure μ sur $[0,1)$ tel que

(a) $J_{\mu,q}$ n'est pas borné si $q \in [1,p]$;

(b) $J_{\mu,q}$ est compact si $q \in (p,+\infty)$.

Démonstration. Rappelons que Λ ne peut pas être une suite sous-géométrique. Nous allons considérer une mesure μ positive de la forme $\mu = \sum\limits_{k\geq 2} c_k \delta_{x_k}$, avec $(x_k)_k \in (0,1)$ et $(c_k)_k \in \mathbb{R}_+$. Soit $\lambda_2 = 1$, et $(\lambda_n)_{n\geq 2}$ une suite satisfaisant :

$$\forall n \geq 3, \quad \lambda_n \geq n^{p+1}\lambda_{n-1}.$$

Pour tout $n \geq 2$ on pose $c_n = \dfrac{n^p \log(n)}{\lambda_n}$ et $x_n = \exp\big(-\dfrac{\log(n)}{\lambda_n}\big)$. On a donc d'une part : $x_n^{\lambda_n} = \frac{1}{n}$· De plus, pour n,k tels que $n \geq k$, on a $x_k^{\lambda_n} = \Big(\dfrac{1}{k}\Big)^{\lambda_n/\lambda_k}$. Vérifions tout d'abord que μ ne satisfait pas (B_p) :

$$\begin{aligned}\lambda_n \int_{[0,1)} t^{p\lambda_n} d\mu &= \sum_{k\geq 0} \lambda_n c_k x_k^{p\lambda_n} \\ &\geq \lambda_n c_n x_n^{p\lambda_n} \\ &= \log(n) \to +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi on obtient $\sup\limits_{n\geq 0} \dfrac{\|t^{\lambda_n}\|_{L^p(\mu)}}{\|t^{\lambda_n}\|_p} = +\infty$, et donc $J_{\mu,p}$ n'est pas borné. D'autre part, pour tout $q > p$, on a :

$$\lambda_n \int_{[0,1)} t^{q\lambda_n} d\mu = \sum_{k<n} \lambda_n c_k x_k^{q\lambda_n} + \lambda_n c_n x_n^{q\lambda_n} + \sum_{k>n} \lambda_n c_k x_k^{q\lambda_n}.$$

Nous allons contrôler ces trois termes un par un. Le premier tout d'abord :

$$\sum_{k<n} \lambda_n c_k x_k^{q\lambda_n} = \sum_{k<n} \log(k) k^p \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\Big(\frac{1}{k^q}\Big)^{\frac{\lambda_n}{\lambda_k}} \leq \big(\sup_{j\geq 2} \frac{\log j}{j^{q-p}}\big) \sum_{k<n} \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\Big(\frac{1}{k^q}\Big)^{\frac{\lambda_n}{\lambda_k}-1}.$$

Comme $k \geq 2$ et $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \to +\infty$, ce terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Pour le terme $n = k$, on a : $\lambda_n c_n x_n^{q\lambda_n} = \frac{\log(n)}{n^{q-p}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Dans la dernière somme, d'après $x_k \leq 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k>n} \lambda_n x_k^{q\lambda_n} c_k &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_n \frac{k^p \log(k)}{\lambda_k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\log(k)}{k} \times \frac{\lambda_n}{\lambda_{k-1}} \\ &\lesssim \frac{\log(n)}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \to 0.\end{aligned}$$

Ainsi, μ satisfait (b_q), Λ est lacunaire, donc d'après le Théorème 3.40 on obtient $J_{\mu,r}$ est compact pour tout $r > q$. Il est donc clair que pour tout $q > p$, $J_{\mu,q}$ est un opérateur compact. $\square$

Exemple 3.51. Soit $p \in (1,+\infty)$. Nous allons construire une suite lacunaire Λ et une mesure μ sur $[0,1)$ tel que :

(a) $J_{\mu,q}$ n'est pas borné si $q \in [1,p)$;

(b) $J_{\mu,q}$ est compact si $q \in [p,+\infty)$.

Démonstration. Nous allons encore prendre une mesure μ de la forme $\mu = \sum_{k\geq 2} c_k\delta_{x_k}$. Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 2}$ tel que $\lambda_2 = 1$, et pour tout $n \geq 3$, on a $\lambda_n \geq n^{p\max\{p,p'\}}\lambda_{n-1}$. Soit $c_n = \dfrac{n^p}{\lambda_n \log(n)}$ et $x_n = \exp(-\dfrac{\log(n)}{\lambda_n})$. On a donc $x_n^{\lambda_n} = \frac{1}{n}$ et pour tous n,k tels que $n \geq k$, on a $x_k^{\lambda_n} = \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{\lambda_n}{\lambda_k}}$. Soit $q \in [1,p)$. Nous vérifions que μ ne satisfait pas (B_q) :

$$\lambda_n \int_{[0,1)} t^{q\lambda_n} d\mu \geq \lambda_n c_n x_n^{q\lambda_n} = \frac{n^{p-q}}{\log(n)} \to +\infty.$$

Ainsi $J_{\mu,q}$ n'est pas borné. D'autre part, nous allons montrer que la suite $(D_{n,p}(\mu))_n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
D_{n,p}(\mu)^p &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{1}{p}} c_j x_j^{\lambda_n} \Big(\sum_k \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_j^{\lambda_k}\Big)^{p-1} \\
&\lesssim \lambda_n^{\frac{1}{p}} c_n x_n^{\lambda_n} \Big(\sum_k \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n^{\lambda_k}\Big)^{p-1} + \sum_{j\neq n} \lambda_n^{\frac{1}{p}} c_j x_j^{\lambda_n} \Big(\frac{1}{1-x_j}\Big)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 1.30. Nous allons d'abord majorer le second terme. Si $j > n$, en utilisant $x_j^{\lambda_n} \leq 1$ et $1 - x_j \geq \frac{\log j}{\lambda_j}$ (d'après l'inégalité de convexité $1-\exp(-u) \geq u$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j>n} \lambda_n^{\frac{1}{p}} c_j x_j^{\lambda_n} \Big(\frac{1}{1-x_j}\Big)^{\frac{1}{p'}} &\leq \sum_{j>n} \lambda_n^{\frac{1}{p}} \frac{j^p}{\lambda_j} \frac{\lambda_j^{\frac{1}{p'}}}{\log(j)^{1+\frac{1}{p'}}} \\
&\leq \sum_{j>n} j^p \Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{j>n} \frac{1}{j^p},
\end{aligned}$$

car $\lambda_j \geq j^{p^2}\lambda_{j-1}$. Donc ce terme tend vers 0. Pour les termes $j < n$, comme $x_j^{\lambda_n} = \left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{\lambda_n}{\lambda_j}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j<n} \lambda_n^{\frac{1}{p}} c_j x_j^{\lambda_n} \Big(\frac{1}{1-x_j}\Big)^{\frac{1}{p'}} &\leq \sum_{j<n} \lambda_n^{\frac{1}{p}} \frac{j^p}{\lambda_j} \Big(\frac{1}{j}\Big)^{\frac{\lambda_n}{\lambda_j}} \frac{\lambda_j^{\frac{1}{p'}}}{\log(j)^{1+\frac{1}{p'}}} \\
&\leq \sum_{j<n} \Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{j}\Big)^{\frac{\lambda_n}{\lambda_j}-p}
\end{aligned}$$

et comme $j \geq 2$ et $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \to +\infty$, ce terme tend aussi vers 0 quand $n \to +\infty$.

Pour majorer la partie "$j = n$", on coupe la somme sur k en trois.

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{\frac{1}{p}} c_n x_n^{\lambda_n} \Big(\sum_k \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n^{\lambda_k}\Big)^{p-1} &\lesssim \lambda_n^{\frac{1}{p}} c_n x_n^{\lambda_n} \Big(\sum_{k<n} \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n^{\lambda_k}\Big)^{p-1} + \lambda_n x_n^{p\lambda_n} c_n \\
&\quad + \lambda_n^{\frac{1}{p}} c_n x_n^{\lambda_n} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n^{\lambda_k}\Big)^{p-1}
\end{aligned}$$

Pour les termes $k < n$, comme $x_n \leq 1$ on a :

$$\lambda_n^{\frac{1}{p}} c_n x_n^{\lambda_n} \Big(\sum_{k<n} \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n^{\lambda_k} \Big)^{p-1} \lesssim \frac{\lambda_n^{\frac{1}{p}} n^p}{\log(n)\lambda_n} \frac{1}{n} \Big(\sum_{k\leq n-1} \lambda_k^{\frac{1}{p}} \Big)^{p-1} \lesssim n^{p-1} \Big(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \Big)^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{1}{n},$$

comme $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} n^{pp'}$. Pour le terme $n = k$, on a $\lambda_n x_n^{p\lambda_n} c_n = \frac{1}{\log(n)} \to 0$. Enfin, pour la somme sur les $k > n$, on a $x_n^{\lambda_k} \big(\frac{1}{n}\big)^{\lambda_k/\lambda_n}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_n^{\frac{1}{p}} c_n x_n^{\lambda_n} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n^{\lambda_k} \Big)^{p-1} &\lesssim \frac{n^{p-1}}{\log(n)} \lambda_n^{-\frac{1}{p'}} \Big(\sum_{k>n} \lambda_k^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_n}} \Big)^{p-1} \\ &\leq \Big(\sum_{k>n} \Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_n}-1} \Big)^{p-1}, \end{aligned}$$

et cette expression tend vers 0 car $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to +\infty$.

Ainsi, la suite $(D_{n,p}(\mu))_n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Comme Λ est lacunaire, on peut appliquer le Lemme 3.39, et donc les nombres d'approximation de $J_{\mu,q}$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi on obtient $J_{\mu,q}$ est compact pour tout $q \geq p$. $\square$

3.3 Mesures de Carleson quand Λ est quasi-lacunaire

Dans cette partie, nous supposerons que $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ est une suite *quasi-lacunaire*, c'est à dire qu'il existe une extraction $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$\sup_n \big(n_{k+1} - n_k\big) = N < +\infty,$$

et il existe $r > 1$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{n_k+1} \geq r\lambda_{n_k}.$$

Les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec P. Lefèvre et V. Munnier. Ils apparaîtront dans une publication future.

3.3.1 Espaces de Müntz quasi-lacunaires

D'après le théorème de Gurariy-Macaev, M^p_Λ est isomorphe à ℓ^p lorsque Λ est lacunaire. Cette propriété se généralise pour les suites quasi-lacunaires, c'est à dire les unions finies de suites lacunaires. Cette classe de suites a été introduite par V. Gurariy et W. Lusky dans leur livre [31]. Pour étudier ces espaces de Müntz, nous définissons les décompositions suivantes :

Définition 3.52. Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{+\infty}$ une suite quasi-lacunaire. Soit $(n_k)_k$ une extraction à écarts bornés telle que $\inf_{k\geq 0} \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} > 1$ et $N = \sup_k (n_{k+1} - n_k) < +\infty$. On définit une suite d'espaces $(F_k)_k \subset M^p_\Lambda$ par :

$$F_k = Span\Big\{\ t^{\lambda_j}, \quad j \in \{n_k + 1, \dots, n_{k+1}\}\Big\},$$

ils dépendent de l'extraction $(n_k)_k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\dim(F_k) \leq N$.

Remarque 3.53. Si Λ est une suite quasi-lacunaire, on peut toujours trouver une extraction $(\lambda_{n_k})_k$ telle que l'on a

a) $\displaystyle\inf_{k\geq 0} \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} > 1$;

b) $\displaystyle\sup_{k\geq 0} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k+1}} < +\infty$;

c) $N = \sup_{k\geq 0} \big(n_{k+1} - n_k\big) < \infty$.

En revanche, la suite $\big(\frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}}\big)_k$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes si Λ n'est pas sous-géométrique.

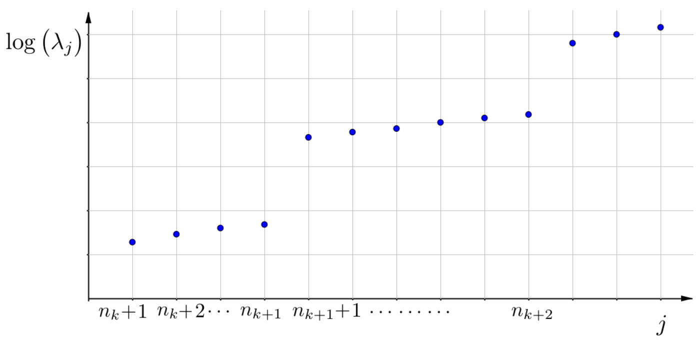

FIGURE 3.2 – Illustration des sous-suites $(\lambda_{n_k})_k$

Quand Λ est quasi-lacunaire, c'est une union finie d'ensembles qui satisfont la gap-condition (voir Prop. 1.22). D'après le théorème de Clarkson-Erdös, on peut écrire toute fonction $f \in M_\Lambda^p$ sous la forme

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} f_k(t),$$

pour presque tout $t \in [0,1)$. Le résultat suivant est beaucoup plus précis à propos de la décomposition $(F_k)_k$.

Théorème 3.54. [31, Th.9.3.2] *Soit Λ une suite quasi-lacunaire et $p \in [1, +\infty)$, alors il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$C_1 \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big\| \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k \Big\|_p \leq C_2 \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}},$$

pour toute suite finie $f_k \in F_k$.

Remarque 3.55. 1) Le Théorème 3.54 signifie que la suite (F_k) est une FDD (pour "finite dimensional decomposition") de M_Λ^p : c'est une notion qui généralise la notion de base dans un espace de Banach. D'après le Théorème 3.54 et la borne uniforme des dimensions des espaces F_k, M_Λ^p est isomorphe à $\bigoplus_{\ell^p}(F_k, \| \, . \, \|_p)$, et donc à ℓ^p si Λ est quasi-lacunaire. Les auteurs ont aussi démontré un résultat analogue au Th. 3.54 pour M_Λ^∞ quand Λ est quasi-lacunaire (voir [31, Th. 9.3.1]).

2) I. Al Alam a obtenu une estimation du même type pour des suites Λ de la forme $\Lambda = \bigcup_{k \geq 0} \{a_k, 2a_k, \ldots, (k-1)a_k, ka_k\}$, où $(a_k)_k$ croît très vite (voir [3, Th. 3.2]). Il obtient ainsi un résultat de décomposition de M_Λ^1 pour des suites Λ qui ne sont pas quasi-lacunaires.

Dans leur article [18], I. Chalendar, E. Fricain et D. Timotin présentent une méthode pour étudier les mesures de Carleson des espaces de Müntz quasi-lacunaires : il faut étudier plus précisément le comportement des fonctions $(f_k) \in F_k$. En fait, nous allons montrer que les fonctions $(f_k)_k$ et les fonctions $(a_k t^{\lambda_{n_k}})_k$ satisfont, à des constantes près, les mêmes inégalités de comparaison entre leurs normes $\| \, . \, \|_\infty$ et $\| \, . \, \|_p$

Lemme 3.56. [31, Cor. 8.1.2] *Soient $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante et $m \in \mathbb{N}$. Alors on a :*

$$\forall t \in [0,1), \quad |f(t)| \leq 2m\big(t^{1/m}\big)^{s_1} \|f\|_\infty,$$

pour tout polynôme avec m termes de la forme $f(t) = \sum_{n=1}^m a_n t^{s_n} \in M(S)$.

Démonstration. On applique le Corollaire 8.1.2 de "Geometry of Müntz spaces and related questions" ([31]) avec la suite $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 1/m$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1], \quad |f(t)| &\leq 2\Big(\sum_{n=1}^m t^{s_n/m} \Big) \|f\|_\infty \\ &\leq 2m(t^{1/m})^{s_1} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Nous aurons aussi besoin de la célèbre inégalité de Newman :

Théorème 3.57. [13, Th. 6.1.1], [31, Th. 8.2.1] *Soient $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante et $m \in \mathbb{N}$. Alors on a :*

$$\forall t \in [0,1], \quad |tf'(t)| \leq 9\Big(\sum_{n=1}^m s_n \Big) \|f\|_\infty,$$

pour tout f de la forme $f(t) = \sum_{n=1}^{m} a_n t^{s_n} \in M(S)$. De plus on a aussi :

$$\frac{2}{3}\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j\Big) \leq \sup_{\substack{f\in M(\Lambda)\\ f\neq 0}} \frac{\|tf'(t)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq 9\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j\Big).$$

Enfin, nous énonçons une simple application du théorème des accroissements finis. C'est la généralisation naturelle de [18, Lemme 5.4] pour $p \in [1, +\infty)$.

Lemme 3.58. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Alors on a :*

1) Si $\|f'\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$, alors on a : $\|f\|_p \geq \dfrac{\|f\|_\infty}{\big(2(p+1)\big)^{\frac{1}{p}}}$.

2) Si $\|f'\|_\infty > 2\|f\|_\infty$, alors on a : $\|f\|_p \geq \dfrac{\|f\|_\infty^{1+\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}\|f'\|_\infty^{\frac{1}{p}}}$.

Démonstration. Soit $M = \|f\|_\infty = |f(x_0)|$ et $D = \|f'\|_\infty$. Si $D \leq 2M$ (le premier cas), alors l'un des intervalles $[x_0, x_0 + \frac{1}{2}]$ ou $[x_0 - \frac{1}{2}, x_0]$ est inclus dans $[0,1]$. Disons que c'est $[x_0 - \frac{1}{2}, x_0] \subset [0,1]$, alors on a pour tout $t \in [x_0 - \frac{1}{2}, x_0]$:

$$f(t) \geq M - (x_0 - t)D \geq M - 2M(x_0 - t),$$

et on obtient donc

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt \geq M^p \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2u)^p du = \frac{M^p}{2(p+1)}.$$

Supposons maintenant que $D > 2M$. Alors au moins l'un des deux intervalles $[x_0, x_0 + \frac{M}{D}]$ ou $[x_0 - \frac{M}{D}, x_0]$ est inclus dans $[0,1]$. Disons que c'est $[x_0, x_0 + \frac{M}{D}] \subset [0,1]$. Alors pour tout $t \in [x_0, x_0 + \frac{M}{D}]$, on a $f(t) \geq M - (t - x_0)D$, et on obtient donc :

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt \geq M^p \int_0^{\frac{M}{D}} (1 - \frac{D}{M}u)^p du = \frac{M^{p+1}}{D(p+1)}.$$

□

Nous pouvons maintenant établir l'estimation clef qui va nous servir pour étudier les mesures de Carleson des espaces de Müntz quasi-lacunaires.

Théorème 3.59. *Soient Λ une suite quasi-lacunaire, $p \in [1, +\infty)$. Avec les mêmes notations que dans la Définition 3.52, il existe une constante τ_Λ qui ne dépend que de Λ et p telle que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall f_k \in F_k, \quad \|f_k\|_\infty \leq \tau_\Lambda \lambda_{n_{k+1}}^{1/p} \|f_k\|_p.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f_k \in F_k = M(\Lambda_k)$. Si $\|f_k'\|_\infty \leq 2\|f_k\|_\infty$, on a :

$$\|f_k\|_\infty \leq (2(p+1))^{1/p} \|f_k\|_\infty,$$

d'après le Lemme 3.58, et ainsi l'estimation est valide dans ce cas. Dans le cas contraire, si $\|f_k'\|_\infty > 2\|f_k\|_\infty$, le Lemme 3.58 entraîne :

$$\|f_k\|_\infty^{p+1} \leq (p+1)\|f_k\|_p^p \|f_k'\|_\infty. \tag{3.3}$$

Comme la suite $(\lambda_n - 1)_n$ est une union finie de suites qui satisfont la gap-condition, les normes $\| \,.\, \|_\infty$ et $\| \,.\, \|_{[1/2,1]}$ sont équivalentes sur $M(\Lambda - 1)$ d'après la Proposition 1.19. Ainsi il existe une constante $C_{1/2} \geq 1$ telle que pour tout $g \in M(\Lambda - 1)$,

$$\|g\|_\infty \leq C_{1/2} \sup_{t\in[1/2,1]} |g(t)|.$$

On obtient pour tout $f \in M(\Lambda)$:

$$\begin{aligned}\|tf'(t)\|_\infty &\geq \sup_{t\in[1/2,1]} |tf'(t)| \\ &\geq \frac{1}{2} \sup_{t\in[1/2,1]} |f'(t)| \\ &\geq \frac{1}{2C_{1/2}} \|f'\|_\infty.\end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité pour $f = f_k$, et d'après l'inégalité de Newman on a :

$$\begin{aligned}\|f_k'\|_\infty &\leq 2C_{1/2}\|tf_k'(t)\|_\infty \\ &\leq 18C_{1/2}\Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \lambda_j\Big)\|f_k\|_\infty \\ &\leq 18C_{1/2}N\lambda_{n_{k+1}}\|f_k\|_\infty.\end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec (3.3), on obtient :

$$\|f_k\|_\infty \leq \tau_\Lambda \lambda_{n_{k+1}}^{1/p}\|f_k\|_p,$$

où $\tau_\Lambda = \big((p+1)18C_{1/2}N\big)^{1/p}$ ne dépend que de p et Λ. □

3.3.2 Caractérisation des mesures de Carleson de M_Λ^p

Nous montrons maintenant que les mesures sous-linéaires sont des mesures de Carleson de M_Λ^p si Λ est quasi-lacunaire, à l'aide des inégalités démontrées partie qui précède.

Théorème 3.60. *Soit Λ une suite quasi-lacunaire et $p \in [1, +\infty)$. Alors toute mesure sous linéaire est une mesure de Carleson de M_Λ^p.*

Si de plus Λ est sous-géométrique, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) μ est une mesure de Carleson de M_Λ^p ;

(ii) μ est sous-linéaire.

Dans ce cas, il existe deux constantes d_1, d_2 qui ne dépendent que de Λ et p telles qu'on a :

$$d_1\|\mu\|_S^{\frac{1}{p}} \leq \|J_{\mu,p}\| \leq d_2\|\mu\|_S^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que Λ est sous-géométrique et quasi-lacunaire. On a directement le sens $(i) \Rightarrow (ii)$ et l'inégalité de gauche, d'après le Corollaire 1.62. Il ne reste qu'à montrer l'inégalité de droite. Soit μ une mesure sous-linéaire et $(f_k) \in F_k$ une famille finie et $f = \sum_k f_k \in M(\Lambda)$, où (F_k) est la suite de sous espaces de M_Λ^p définie en Déf. 3.52. D'après le Lemme 3.56, on a pour tout $t \in [0, 1)$:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} \Big|\sum_{k\geq 0} f_k(t)\Big|^p d\mu &\leq (2N)^p \int_{[0,1)} \Big(\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_\infty \big(t^{1/N}\big)^{\lambda_{n_k}}\Big)^p d\mu \\ &\leq (2N)^p\|\mu\|_S \int_0^1 \Big(\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_\infty \big(t^{1/N}\big)^{\lambda_{n_k}}\Big)^p dt,\end{aligned}$$

d'après le Lemme 1.60, car la fonction $t \mapsto \big(\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_\infty \big(t^{1/N}\big)^{\lambda_{n_k}}\big)^p$ est croissante, positive et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k\geq 0} f_k\Big\|_{L^p(\mu)} &\leq 2N\|\mu\|_S^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^1\Big(\sum_{k\geq 0}\|f_k\|_\infty u^{\lambda_{n_k}}\Big)^p N u^{N-1}du\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq 2N^{1+\frac{1}{p}}\|\mu\|_S^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^1\Big(\sum_{k\geq 0}\|f_k\|_\infty t^{\lambda_{n_k}}\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&= 2N^{1+\frac{1}{p}}\|\mu\|_S^{\frac{1}{p}}\Big\|\sum_k \|f_k\|_\infty t^{\lambda_{n_k}}\Big\|_p\\
&\leq 2N^{1+\frac{1}{p}}\|\mu\|_S^{\frac{1}{p}} C_2\Big(\sum_k \frac{\|f_k\|_\infty^p}{\lambda_{n_k}}\Big)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

d'après le théorème classique de Gurariy-Macaev dans le cas lacunaire. En appliquant successivement le Théorème 3.59 et le Théorème de Gurariy-Macaev quasi-lacunaire 3.54, il existe une constante τ_Λ et une constante $C_1 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{\|f_k\|_\infty^p}{\lambda_{n_k}}\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \tau_\Lambda\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{\|f_k\|_p^p}{\lambda_{n_k}}\lambda_{n_{k+1}}\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \tau_\Lambda\Big(\sup_{k\geq 0}\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}}\Big)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{C_1}\|f\|_p.
\end{aligned}$$

Comme Λ est sous-géométrique, on pose $M = \sup_n \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ et on obtient :

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 2N^{1+\frac{1}{p}}\|\mu\|_S^{\frac{1}{p}} C_2\tau_\Lambda M^{N/p}\|f\|_p,$$

et ainsi μ est une mesure de Carleson de M_Λ^p. Supposons maintenant que Λ est seulement quasi-lacunaire mais pas pas sous-géométrique. Il existe une suite sous-géométrique Λ' qui contient Λ et qui est elle aussi quasi-lacunaire (voir la preuve de [31, Th. 9.3.3] pour plus de détails). Comme $M_{\Lambda'}^p$ contient M_Λ^p, et d'après la première partie de la preuve, il existe bien une constante $C \geq 0$ telle que $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_p$ pour tout $f \in M_\Lambda^p$. $\square$

Nous pouvons trouvons aussi une condition suffisante de compacité.

Théorème 3.61. *Soient Λ une suite quasi-lacunaire et $p \in [1,+\infty)$. Alors pour toute mesure sous-linéaire évanescente μ, l'opérateur $J_{\mu,p} : M_\Lambda^p \to L^p(\mu)$ est compact.*

Si de plus Λ est sous-géométrique, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- *(i) le plongement $J_{\mu,p} : M_\Lambda^p \to L^p(\mu)$ est compact;*
- *(ii) μ est sous-linéaire évanescente.*

Dans ce cas, il existe deux constantes d_1, d_2 qui ne dépendent que de Λ et p (mais pas de μ) telles qu'on a :

$$d_1 \lim_{k\to+\infty}\|\mu_{|A_k}\|_S^{\frac{1}{p}} \leq \|J_{\mu,p}\|_e \leq d_2 \lim_{k\to+\infty}\|\mu_{|A_k}\|_S^{\frac{1}{p}},$$

où $A_k = (1-1/k, 1)$.

Démonstration. Supposons pour commencer que Λ est quasi-lacunaire et sous-géométrique. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les mesures $\mu_k = \mu_{|[0,1-1/k]}$, $\mu'_k = \mu_{|(1-1/k,1)}$, et les ensembles $A_k = (1-1/k, 1)$. Comme le support de μ_k est un compact de $[0,1)$, l'opérateur $J_{\mu_k,p}$ est compact pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme les mesures μ_k sont les restrictions de μ sur des ensembles qui se concentrent en 1, elles donnent une information sur la norme essentielle. D'après le Corollaire 1.51 on obtient :

$$\|J_{\mu,p}\|_e = \lim_{k\to+\infty}\|J_{\mu'_k,p}\|,$$

car $J_{\mu'_k,p} = R_k J_{\mu,p}$ avec les notations du Corollaire. En appliquant le Théorème 3.60, on peut contrôler la norme de $J_{\mu'_k,p}$, et on obtient :

$$d_1 \lim_{k\to+\infty} \|\mu'_k\|_S^{\frac{1}{p}} \leq \|J_{\mu,p}\|_e \leq d_2 \lim_{k\to+\infty} \|\mu'_k\|_S^{\frac{1}{p}},$$

et en particulier, $J_{\mu,p}$ est compact si et seulement si μ est sous-linéaire évanescente. Comme pour la preuve du Théorème 3.60, si Λ n'est pas sous-géométrique on peut raisonner sur $M^p_{\Lambda'}$ pour une suite sous-géométrique Λ' qui contient Λ. Alors $J_{\mu,p} : M^p_\Lambda \subset L^p(\mu)$ est la restriction de $J_{\mu,p} : M^p_{\Lambda'} \subset L^p(\mu)$ et il est donc compact si μ est sous-linéaire évanescente. $\square$

Chapitre 4

Opérateurs de Cesàro

Sommaire

4.1 Espaces de Cesàro **99**
4.1.1 Définition et propriétés immédiates 99
4.1.2 Théorème de Müntz dans les espaces de Cesàro 102
4.2 Norme essentielle des opérateurs de Cesàro **106**
4.2.1 Opérateurs de Cesàro classiques 106
4.2.2 Les opérateurs de Cesàro sur les espaces de Cesàro 110
4.3 Opérateurs de multiplication **113**

Dans ce chapitre final, nous étudions les opérateurs de Cesàro suivants :

Définition 4.1. On définit *l'opérateur de Cesàro* qu'on note Γ, par :

$$\Gamma(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,$$

pour toute fonction $f \in L^1_{\text{loc}}([0,1))$, et pour tout $x \in (0,1)$. De même on définit *l'opérateur de Cesàro discret,* noté γ, par :

$$\gamma(u)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k,$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Les opérateurs Γ et γ ci dessus ne sont pas encore de "vrais opérateurs", mais nous les définirons entre différents espaces de fonctions pour les étudier comme tel. Par exemple, l'inégalité de Hardy permet de les voir comme des opérateurs sur L^p et ℓ^p :

Théorème 4.2. [33, Th. 326 et 327 p.240] Inégalités de Hardy.
Soient $p \in (1,+\infty]$, $f \in L^p$, et $u = (u_n)_n \in \ell^p$. Alors on a :

$$\|\Gamma(f)\|_p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)\|f\|_p \quad \textit{et} \quad \|\gamma(u)\|_{\ell^p} \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)\|u\|_{\ell^p}.$$

De plus, la constante $p' = \frac{p}{p-1}$ est la meilleure possible.

L'inégalité de Hardy permet de définir les opérateurs de Cesàro $\Gamma_p : L^p \to L^p$ (par $f \mapsto \Gamma(f)$) $\gamma_p : \ell^p \to \ell^p$ (par $u \mapsto \gamma(u)$) et $\gamma_p : \ell^p \to \ell^p$ (par $u \mapsto \gamma(u)$), lorsque $p > 1$. Nous nous intéresserons à leur norme essentielle.

Nous étudions aussi les espaces de Cesàro Ces_p (resp. ces_p) définis comme l'ensemble des fonctions f (resp. suites u) telles que $\Gamma(|f|) \in L^p$ (resp. $\gamma(|u|) \in \ell^p$). Les résutlats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec I. Al Alam, G. Habib, P. Lefèvre et F. Maalouf et apparaissent dans l'article [6].

4.1 Espaces de Cesàro

Dans cette partie, nous travaillons dans les espaces de Cesàro. Tout d'abord, nous établissons des inégalités utiles dans ces espaces, puis nous démontrons un théorème de Müntz dans les espaces de Cesàro, avec toute une série d'inégalités qui nous permettent d'étudier les espaces de Müntz-Cesàro.

4.1.1 Définition et propriétés immédiates

Nous définissons les espaces de Cesàro de la manière suivante :

Définition 4.3. Pour $p \in [1, +\infty]$ *l'espace de Cesàro* noté Ces_p, est l'ensemble des classes de fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ mesurables, qui satisfont :

$$\|f\|_{C(p)} = \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < +\infty \qquad \text{si } p < +\infty$$

ou bien

$$\|f\|_{C(\infty)} = \sup_{x\in(0,1]} \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt < +\infty \qquad \text{si } p = +\infty.$$

En d'autres termes, $\mathrm{Ces_p}$ est l'espace des fonctions mesurables f telles que $\Gamma(|f|) \in L^p$, et il est muni de la norme $\|f\|_{C(p)} = \|\Gamma(|f|)\|_p$. L'espace Ces_∞ est parfois appelé *l'espace de Korenblyum, Krein et Levin*. De même, pour $p \in (1, \infty]$, on définit *l'espace de Cesàro discret* ces_p comme l'ensemble des suites complexes $x = (x_k)_{k\geq 1}$ telles que

$$\|x\|_{c(p)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

ou bien

$$\|x\|_{c(\infty)} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k| < \infty\Big) \qquad \text{si } p = \infty.$$

On pourra consulter les articles [1, 10] pour des résultats récents dans ces espaces. Voir aussi le monographe [29] dans lequel les espaces de suites ces_p sont étudiés pour $p > 1$. L'auteur établit des résultats de factorisation dans ces espaces et exhibe des normes équivalentes à la norme $\| \,.\, \|_{c(p)}$. On trouve aussi dans la littérature des espaces de fonctions de Cesàro sur $[0, +\infty]$, mais nous n'allons pas nous y intéresser dans ce mémoire.

Remarque 4.4. Quand $p = 1$, ces espaces ne sont pas très nouveaux : notons d'une part qu'on a $\mathrm{ces}_1 = \{0\}$ à cause de la divergence de la série harmonique. D'autre part, l'espace $\mathrm{Ces}_1([0,1])$ est un espace $L^1(w)$, où le poids w est défini par $w(t) = \log(\frac{1}{t})$. En effet on a :

$$\begin{aligned}\|f\|_{C(1)} &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\Big)dx \\ &= \int_0^1 |f(t)|\Big(\int_t^1 \frac{dx}{x}\Big)dt \\ &= \int_0^1 |f(t)|\log(1/t)dt.\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $p \in (1, +\infty]$, l'inégalité de Hardy (voir Th.4.2) garantit que pour tout $p > 1$ l'espace de Cesàro Ces_p contient continûment L^p : pour $f \in L^p$ on a $\|\Gamma(|f|)\|_p \leq p'\|f\|_p$. De même, l'inclusion $\ell^p \subset \mathrm{ces}_p$ est bornée pour tout $p > 1$.

La proposition suivante nous donne des informations sur le comportement des fonctions des espaces de Cesàro.

Proposition 4.5. *Soient* $p \in [1, +\infty]$ *et* $a \in (0,1)$. *Alors les inclusions suivantes :* $\mathcal{C} \subset \mathrm{Ces}_p \subset L^1([0,a])$ *sont bornées. De plus si* p *est fini on a :*

$$\forall f \in \mathrm{Ces}_p, \quad \int_0^a |f(t)|dt \le \frac{b}{(b-a)^{1/p}} \Big(\int_0^b \big(\Gamma(|f|)(x)\big)^p dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

pour tous a, b *satisfaisant* $0 < a < b \le 1$.

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{C}$, on a clairement $\|f\|_{C(p)} \le \|f\|_\infty$. D'autre part toute fonction $f \in \mathrm{Ces}_\infty$ satisfait $\|f\|_{C(\infty)} \ge \Gamma(|f|)(1) = \|f\|_1$. Supposons maintenant que p est fini. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^b \big(\Gamma(|f|)(x)\big)^p dx &= \int_0^b \frac{1}{x^p} \Big(\int_0^x |f(t)|dx \Big)^p dx \\ &\ge \frac{1}{b^p} \int_a^b \Big(\int_0^x |f(t)|dt \Big)^p dx \\ &\ge \frac{(b-a)}{b^p} \|f\|^p_{L^1([0,a])}. \end{aligned}$$

L'inégalité annoncée est démontrée, et en l'appliquant pour $b = 1$ on obtient

$$\|f\|_{L^1([0,a])} \le \frac{1}{(1-a)^{1/p}} \|f\|_{C(p)}.$$

□

Nous démontrons maintenant un résultat de densité dont nous aurons besoin pour formuler le théorème de Müntz dans les espaces de Cesàro.

Théorème 4.6. *Soit* $p \in [1, +\infty)$ *et* $\mathcal{C}_K$ *l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$ *et à support compact dans* $(0,1)$. *Alors* $\mathcal{C}_K$ *est dense dans* Ces_p. *Ceci est faux si* $p = +\infty$ *car l'espace* Ces_∞ *n'est pas séparable.*

Démonstration. Dans le cas $p = 1$, d'après la Remarque 4.4 l'espace Ces_1 est un espace $L^1(w)$, où w est le poids donné par $w(t) = \log\left(\frac{1}{t}\right)$. L'application

$$\Psi : \begin{cases} L^1 & \longrightarrow \quad L^1(w) \\ f & \longmapsto \quad w^{-1} f \end{cases}$$

est une isométrie surjective de L^1 vers $L^1(\mu)$. De plus on a $\Psi(\mathcal{C}_K) = \mathcal{C}_K$, et comme $\mathcal{C}_K$ est dense dans L^1 on obtient le résultat pour $p = 1$. Fixons maintenant $p \in (1, \infty)$ et $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathrm{Ces}_p$. Comme $\Gamma(|f|) \in L^p$, il existe $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ satisfaisant :

$$\Big(\int_0^{2\delta} \big(\Gamma(|f|)(x)\big)^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon \quad \text{et} \quad \Big(\int_{1-\delta}^1 \big(\Gamma(|f|)(x)\big)^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon.$$

D'après la Proposition 4.5, on a $f \in L^1([0, 1-\delta])$, et par densité, il existe une fonction φ continue sur $[\delta, 1-\delta]$ telle que $\varphi(\delta) = \varphi(1-\delta) = 0$, et $\|f - \varphi\|_{L^1([\delta, 1-\delta])} < \delta^{1/p'} \varepsilon$. De plus, en appliquant l'inégalité de la Proposition 4.5 avec $a = \delta$ et $b = 2\delta$, on obtient :

$$\|f\|_{L^1([0,\delta])} \le \frac{2\delta}{\delta^{\frac{1}{p}}} \Big(\int_0^{2\delta} \big(\Gamma(|f|)(x)\big)^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \le 2\delta^{\frac{1}{p'}} \varepsilon.$$

En prolongeant φ sur $[0, \delta]$ et sur $[1-\delta, 1]$, par la fonction nulle, on a donc $\|f - \varphi\|_{L^1([0,1-\delta])} \le 3\delta^{1/p'} \varepsilon$. Nous allons estimer la quantité $\|f - \varphi\|_{C(p)}$ en séparant l'intégrale en trois. D'une part, comme φ est nulle sur $[0, \delta]$, on a :

$$\int_0^\delta \big(\Gamma(|f - \varphi|)(x)\big)^p dx = \int_0^\delta \big(\Gamma(|f|)(x)\big)^p dx \le \varepsilon^p,$$

d'après le choix de δ. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\delta}^{1-\delta} \big(\Gamma(|f-\varphi|)(x)\big)^p dx &= \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1}{x^p}\Big(\int_0^x |f(t)-\varphi(t)|dt\Big)^p dx \\
&\leq \Big(\int_{\delta}^{1-\delta} \frac{dx}{x^p}\Big)\Big(\int_0^{1-\delta} |f(t)-\varphi(t)|dt\Big)^p \\
&\leq \frac{1}{(p-1)\delta^{p-1}}\|f-\varphi\|^p_{L^1([0,1-\delta])} \\
&\leq \frac{(3\varepsilon)^p}{p-1}\cdot
\end{aligned}$$

Enfin pour le dernier terme, comme φ est nulle sur $[1-\delta,1]$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{1-\delta}^{1} \big(\Gamma(|f-\varphi|)(x)\big)^p dx &= \int_{1-\delta}^{1} \frac{1}{x^p}\left(\int_0^{1-\delta} |f(t)-\varphi(t)|dt + \int_{1-\delta}^{x} |f(t)|dt\right)^p dx \\
&\leq \int_{1-\delta}^{1} \frac{1}{x^p} 2^p\left(\|f-\varphi\|^p_{L^1([0,1-\delta])} + \Big(\int_{1-\delta}^{x} |f(t)|dt\Big)^p\right)dx \\
&\leq \Big(\int_{1-\delta}^{1} \frac{dx}{x^p}\Big)(6\varepsilon)^p\delta^{p-1} + 2^p\int_{1-\delta}^{1} \big(\Gamma(|f|)(x)\big)^p \\
&\leq \frac{(6\varepsilon)^p\delta^{p-1}}{(p-1)(1-\delta)^{p-1}} + (2\varepsilon)^p,
\end{aligned}$$

d'après le choix de δ, et en utilisant $\delta \leq \frac{1}{3}\cdot$ On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\|f-\varphi\|_{C(p)} &= \Big(\int_0^1 \big(\Gamma(|f-\varphi|)(x)\big)^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\varepsilon^p + \frac{(3\varepsilon)^p}{p-1} + \frac{(6\varepsilon)^p\delta^{p-1}}{(p-1)(1-\delta)^{p-1}} + (2\varepsilon)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\varepsilon,
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{C}$ est dense dans Ces_p. La non-séparabilité de Ces_∞ est déjà connue, mais nous allons la justifier avec un argument court. Soit $(I_n)_{n\geq 2}$ la suite d'intervalles disjoints définie par $I_n = \Big(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\Big]$. Alors on définit l'opérateur Φ suivant :

$$\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \ell^\infty & \longrightarrow & \mathrm{Ces}_\infty \\ a & \longmapsto & \sum\limits_n a_n \mathbb{1}_{I_n}. \end{array}\right.$$

Pour toute suite bornée $a = (a_n)_{n\geq 2} \in \ell^\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(a)\|_{C(\infty)} &\geq \sup_{n\geq 2} \Gamma\big(|\Phi(a)|\big)\Big(\frac{1}{n!}\Big) \\
&\geq \sup_{n\geq 2}\Big(n!\int_{1/(n+1)!}^{1/n!} |a_n| - \|a\|_{\ell^\infty}\frac{n!}{(n+1)!}\Big) \\
&\geq \sup_{n\geq 2} \frac{n-1}{n+1}|a_n|.
\end{aligned}$$

Ainsi, Φ satisfait :

$$\forall a \in \ell^\infty, \ \ \sup_{n\geq 2}\Big(\frac{n-1}{n+1}|a_n|\Big) \leq \|\Phi(a)\|_{C(\infty)} \leq \|a\|_{\ell^\infty},$$

c'est un isomorphisme de ℓ^∞ vers un sous-espace de Ces_∞, qui n'est donc pas séparable. $\square$

4.1.2 Théorème de Müntz dans les espaces de Cesàro

En utilisant uniquement les théorèmes de Müntz dans $\mathcal{C}$ et dans L^p, nous démontrons un théorème de Müntz pour les espaces de Cesàro. Rappelons que pour une suite croissante $\Lambda = (\lambda_n)_n$ les monômes $(y_n)_n$ définis par $y_n(t) = t^{\lambda_n}$ sont dans l'espaces de Cesàro Ces_p pour tout $p \in [1, +\infty]$, et on a :

$$\|y_n\|_{C(p)} = (\lambda_n + 1)^{-1}(p\lambda_n + 1)^{-\frac{1}{p}}.$$

Théorème 4.7. *Soient $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{R}_+$ une suite strictement croissante et $p \in [1, +\infty)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'espace $M(\Lambda)$ est dense dans Ces_p ;

(ii) L'espace $Span\{1, x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \ldots\}$ est dense dans l'adhérence de $\mathcal{C}$ dans Ces_∞ ;

(iii) La suite Λ satisfait $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que Λ satisfait $\sum_{k\geq 1} 1/\lambda_k = +\infty$ et fixons une fonction continue f sur $[0, 1]$. D'après le théorème de Müntz dans $\mathcal{C}$, il existe une suite de polynômes $(f_n)_n \in Span\{1, x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \ldots\}$ qui converge vers f dans $\mathcal{C}$. Comme l'inclusion $\mathcal{C} \subset \mathrm{Ces}_\infty$ est bornée on obtient directement : $\|f_n - f\|_{C(\infty)} \leq \|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ainsi l'espace $Span\{1, x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \ldots\}$ est dense dans l'adhérence de $\mathcal{C}$ dans Ces_∞, et on obtient le point $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Supposons encore que $\sum_{k\geq 1} 1/\lambda_k = +\infty$, et fixons maintenant $p \in [1, +\infty)$ et $q \in (p, +\infty)$. D'après le théorème de Müntz dans L^q, il existe une suite $(f_n)_n \in M(\Lambda)$ telle que $\|f_n - f\|_q \to 0$ quand $n \to +\infty$. On obtient :

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{C(p)} &= \|\Gamma(|f_n - f|)\|_p \\ &\leq \|\Gamma(|f_n - f|)\|_q \\ &\leq q'\|f_n - f\|_q \to 0,\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hardy. D'après la densité des fonctions continues (voir Th. 4.6), $M(\Lambda)$ est dense dans Ces_p et on obtient $(iii) \Rightarrow (i)$.

Pour la partie "seulement si", supposons que Λ satisfait $\sum_{k\geq 1} 1/\lambda_n < +\infty$ et fixons $\mu \in \mathbb{R}_+ \setminus \Lambda$. Alors pour tout $a \in (0, 1)$ et pour tout polynôme de Müntz $f \in M(\Lambda)$, on a :

$$\begin{aligned}\|x^\mu - f\|_{C(p)} &\geq (1-a)^{\frac{1}{p}}\|x^\mu - f\|_{L^1([0,a])} \\ &= a(1-a)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 |(au)^\mu - f(au)|du \\ &\geq (1-a)^{\frac{1}{p}} a^{\mu+1} \inf_{g\in M(\Lambda)} \|x^\mu - g\|_1.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Müntz dans L^1 (voir le Lemme 1.4), on a $\inf_{g\in M(\Lambda)} \|x^\mu - g\|_1 > 0$ et alors, $M(\Lambda)$ n'est pas dense dans Ces_p. □

Remarque 4.8. 1) Même lorsque Λ satisfait la condition $\sum_{n\geq 1} 1/\lambda_n = +\infty$, il faut supposer que $0 \in \Lambda$ pour approcher les fonctions constantes avec des polynômes de Müntz dans Ces_∞. En effet, si $f \in \mathcal{C}_0$, alors $\|1 - f\|_{C(\infty)} \geq |\Gamma(|1 - f|)(0)| = 1$. Mais ce problème n'arrive pas dans les espaces Ces_p pour $p \in [1, +\infty)$. Avec une variante de la preuve précédente, le Théorème 4.7 reste valide pour une suite $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$, en remplaçant $Span\{1, t^{\lambda_0}, \ldots\}$ par $M(\Lambda)$ et en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}_0$ dans l'assertion (ii).

2) Nous aurions pu appliquer le Théorème 1.10 pour obtenir ce résultat (voir Ex. 1.11). En effet, dans le livre [31], les auteurs démontrent un théorème de Müntz pour certains espaces ayant la propriété de blow-up, et ce résultat s'applique dans les espaces de Cesàro. De plus, ils obtiennent les analogues des Prop. 4.11 et 4.12 que nous allons

voir dans la suite, dans ces espaces plus généraux. Mais comme pour notre preuve du Théorème 4.7, on peut retrouver la plupart des estimations voulues dans Ces_p en utilisant les inclusions bornées :

$$\mathcal{C} \subset \mathrm{Ces}_p \subset L^1([0,a]),$$

pour tout $a > 0$, et en utilisant les mêmes estimations dans L^1 et dans $\mathcal{C}$.

Nous définissons maintenant les espaces de Müntz-Cesàro.

Définition 4.9. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite qui satisfait la *condition de Müntz* :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty,$$

et la *gap condition* :

$$\inf_{n\geq 0} \big(\lambda_{n+1} - \lambda_n\big) > 0.$$

On définit *l'espace de Müntz-Cesàro space* $M_\Lambda^{C(p)}$ comme l'adhérence de $M(\Lambda)$ dans Ces_p. C'est un sous-espace strict de Ces_p.

Avant toute chose, nous signalons que l'espace $M_\Lambda^{C(\infty)}$ est isomorphe à M_Λ^1.

Proposition 4.10. *Soit Λ une suite satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition. Alors les normes $\| \,.\, \|_{C(\infty)}$ et $\| \,.\, \|_1$ sont équivalentes sur $M(\Lambda)$.*

Démonstration. La minoration est vraie en toute généralité : pour toute fonction $g \in \mathrm{Ces}_\infty$, on a

$$\|\Gamma(|g|)\|_{C(\infty)} = \sup_{x\in(0,1]} \Gamma(|g|)(x) \geq \Gamma(|g|)(1) = \|g\|_1.$$

Pour démontrer la majoration, on utilise une inégalité de type Chebychev dans M_Λ^1 : d'après la Proposition 1.16, il existe une constante $C_{1/2}$ qui ne dépend que de Λ telle que pour tout $f \in M(\Lambda)$, on a :

$$\sup_{t\in[0,1/2]} |f(t)| \leq C_{1/2}\|f\|_1.$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}\|f\|_{C(\infty)} &\leq \sup_{x\in[0,1/2]} \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt + \sup_{x\in[1/2,1]} \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt \\ &\leq C_{1/2}\|f\|_1 + 2\|f\|_1.\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est l'analogue du théorème de Clarkson-Erdös pour les espaces de Müntz-Cesàro.

Proposition 4.11. *Soient $p \in [1, +\infty)$ (resp. $p = +\infty$) et $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$ une suite satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition. Alors pour toute fonction $f \in \mathrm{Ces}_p$ (resp. $f \in \overline{\mathcal{C}}^{\mathrm{Ces}_\infty}$), les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in M_\Lambda^{C(p)}$.

(ii) Il existe une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}$ telle que la série entière

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{\lambda_n},$$

converge uniformément sur tout compact de $[0,1)$, et $\widetilde{f} = f$ presque partout.

Démonstration. Pour la partie $(i) \Rightarrow (ii)$, nous considérons une fonction $f \in M_\Lambda^{C(p)}$. Par définition il existe une suite de polynômes de Müntz $(f_n)_n \in M(\Lambda)$ qui converge vers f dans Ces_p quand $n \to +\infty$. On obtient :

$$\|\Gamma(f_n) - \Gamma(f)\|_p \leq \|\Gamma(|f_n - f|)\|_p = \|f_n - f\|_{C(p)}.$$

Comme $\Gamma(f)$ est la limite dans L^p (ou dans $\mathcal{C}$) d'une suite de polynômes de Müntz, on a $\Gamma(f) \in M_\Lambda^p$. D'après le théorème de Clarkson-Erdös dans L^p et dans $\mathcal{C}$ (Th. 1.14), il existe une suite $b_n \in \mathbb{C}$ telle que $\limsup\limits_{n\to+\infty} |b_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} \leq 1$, et qui satisfait :

$$\forall x \in [0,1), \quad \Gamma(f)(x) = \sum_n b_n x^{\lambda_n}.$$

D'autre part, on définit $\widetilde{f}(x) = \sum_n b_n(\lambda_n + 1)x^{\lambda_n}$. Cette série converge uniformément sur tout compact de $[0,1)$ car elle a le même rayon de convergence que $\Gamma(f)$. On obtient donc $\Gamma(\widetilde{f})(x) = \Gamma(f)(x)$ pour tout $x \in (0,1)$ et d'après l'injectivité de la moyenne de Cesàro, il ensuit $\widetilde{f} = f$ presque partout.

Pour la réciproque, nous reproduisons la preuve de [31, Cor. 6.2.4]. Bien que ce résultat soit énoncé pour les espaces L^p et $\mathcal{C}_0$, la méthode requiert uniquement la densité des fonctions continues et la propriété de blow-up. Ces deux propriétés sont satisfaites dans les espaces de Cesàro Ces_p et dans l'espace $\overline{\mathcal{C}}^{\mathrm{Ces}_\infty}$.

Soit $f \in \mathrm{Ces}_p$ (resp. $f \in \overline{\mathcal{C}}^{\mathrm{Ces}_\infty}$) une fonction satisfaisant $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{\lambda_n}$ pour tout $x \in [0,1)$. Comme la série converge sur $[0,1)$ et que la suite Λ satisfait la gap-condition, les coefficients $(a_n)_n$ vérifient l'inégalité suivante : $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} \leq 1$. Pour une fonction mesurable h sur $[0,1)$ et $\rho \in (0,1)$, nous noterons h_ρ la fonction définie presque partout par $h_\rho(t) = h(\rho t)$. Soit $(f_m)_m$ la suite de sommes partielles $f_m(t) = \sum_{n=0}^m a_n t^{\lambda_n} \in M(\Lambda)$. Alors pour tout $\rho \in (0,1)$, on a :

$$\|f_\rho - (f_m)_\rho\|_{C(p)} \leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{|a_n|\rho^{\lambda_n}}{\lambda_n + 1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc $f_\rho \in M_\Lambda^{C(p)}$. Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. D'après la densité de $\mathcal{C}$ dans Ces_p si $p < +\infty$ (voir le Théorème 4.6), et par hypothèse si $p = +\infty$, il existe une fonction continue g telle que $\|f - g\|_{C(p)} < \varepsilon$. Pour tout $\rho \in (0,1)$, on a :

$$\begin{aligned}\|f - f_\rho\|_{C(p)} &\leq \|f_\rho - g_\rho\|_{C(p)} + \|g - g_\rho\|_{C(p)} + \|f - g\|_{C(p)} \\ &\leq \Big(\frac{1}{\rho} + 1\Big)\|f - g\|_{C(p)} + \|g - g_\rho\|_\infty.\end{aligned}$$

Nous avons utilisé ici la bornitude des opérateurs de blow-up $C_\rho : \mathrm{Ces}_p \to \mathrm{Ces}_p$ définis par $C_\rho(h) = h_\rho$. En effet, on a $\|C_\rho(h)\|_{C(p)} \leq \frac{1}{\rho}\|h\|_{C(p)}$ pour tout $p \in [1,+\infty]$. Comme g est uniformément continue sur $[0,1]$, on a $\lim_{\rho\to1} \|g - g_\rho\|_\infty = 0$ et on obtient alors $\lim_{\rho\to1} \|f - f_\rho\|_{C(p)} \leq 2\varepsilon$. Pour tout $\rho \in (0,1)$, on a $f_\rho \in M_\Lambda^{C(p)}$, donc $f \in M_\Lambda^{C(p)}$. □

Le résultat suivant est une estimation analogue à la Proposition 1.16 pour les espaces de Müntz-Cesàro : une inégalité de type Chebychev et une inégalité de type Bernstein.

Proposition 4.12. *Soient $p \in [1,+\infty]$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq0}$ une suite satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition. Alors pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe une constante c_ε telle que*

$$\|f\|_{[0,1-\varepsilon]} \leq c_\varepsilon \|f\|_{C(p)},$$

et une constante c'_ε telle que

$$\|f'\|_{[0,1-\varepsilon]} \leq c'_\varepsilon \|f\|_{C(p)},$$

pour tout polynôme de Müntz $f \in M(\Lambda)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in (0,1)$. Nous fixons $a \in (0,1)$ et $\eta \in (0,1)$ tels que $a(1-\eta) > 1-\varepsilon$. Pour tout polynôme de Müntz $f \in M(\Lambda)$, on définit $f_a(t) := f(at) \in M(\Lambda)$. D'après la Proposition 1.16, il existe une constante $C'_\eta \in \mathbb{R}_+$ telle que : $\|g'\|_{[0,1-\eta]} \le C_\eta \|g\|_1$, pour tout $g \in M(\Lambda)$. En appliquant cela pour la fonction f_a, on a :

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{Ces}_p} &\ge (1-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^1([0,a])} \\ &= a(1-a)^{\frac{1}{p}} \|f_a\|_1 \\ &\ge a\frac{(1-a)^{\frac{1}{p}}}{C'_\eta} \|(f_a)'\|_{[0,1-\eta]} \\ &= a^2 \frac{(1-a)^{\frac{1}{p}}}{C'_\eta} \|f'\|_{[0,a(1-\eta)]}.\end{aligned}$$

D'après le choix de a et η, on obtient une constante c'_ε qui satisfait l'inégalité de type Bernstein annoncée. Dans le cas où $\lambda_0 > 0$, alors pour toute fonction $f \in M(\Lambda)$ on a $f(0) = 0$ et d'après le théorème des accroissements finis, on obtient :

$$\|f\|_{[0,1-\varepsilon]} \le \sup_{t\in[0,1-\varepsilon]} \int_0^t |f't)|dt \le c'_\varepsilon \|f\|_{C(p)}.$$

Si $\lambda_0 = 0$ alors pour $f \in M(\Lambda)$ de la forme $f(t) = \sum_n b_n t^{\lambda_n}$ on a $f(0) = b_0$. Fixons $a \in (0,1)$ et $\delta \in (0,1)$. D'après le Théorème 1.12, il existe K_δ tel que pour toute fonction $g(t) = \sum_n c_n t^{\lambda_n}$ on a :

$$|c_0| \le K_\delta (1+\delta)^{\lambda_0} \|g\|_1 = K_\delta \|g\|_1.$$

Pour une fonction $f = \sum_n b_n t^{\lambda_n}$, nous appliquons cette estimation à la fonction $g = f_a \in M(\Lambda)$ définie par $f_a(t) = f(at) = \sum_n b_n a^{\lambda_n} t^{\lambda_n}$. On a :

$$|f(0)| = |b_0.a^0| \le K_\delta \|f_a\|_1 = \frac{K_\delta}{a} \|f\|_{L^1([0,a])} \le \frac{K_\delta (1-a)^{-\frac{1}{p}}}{a} \|f\|_{C(p)},$$

et on obtient

$$\|f\|_{[0,1-\varepsilon]} \le \Big(\frac{K_\delta (1-a)^{-\frac{1}{p}}}{a} + c'_\varepsilon \Big) \|f\|_{C(p)}.$$

□

Le résultat qui suit est l'analogue du Corollaire 1.18 dans les espaces de Müntz-Cesàro.

Corollaire 4.13. *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^\infty$ une suite satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition. Alors pour toute suite bornée $(f_n)_{n=1}^\infty \in M_\Lambda^{C(p)}$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ qui converge uniformément sur tout compact de* $[0,1)$.

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans Ces_p. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la Proposition 4.12 la suite $(f_n)_n$ est bornée et équicontinue sur $[0,1-\varepsilon]$. D'après le théorème d'Arzéla-Ascoli, il existe une extraction $(n_k(\varepsilon))_k$ telle que $(f_{n_k(\varepsilon)})$ converge uniformément sur $[0,1-\varepsilon]$. Ainsi, par récurrence, on construit une suite décroissante d'ensembles $(S_j)_{j\ge1}$ d'entiers : $\mathbb{N} \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots$, tels que $(f_n)_{n\in S_j}$ converge uniformément sur $[0,1-\frac{1}{j}]$. D'après un procédé diagonal, on obtient alors un ensemble S tel que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $[0,1)$ quand $n \to +\infty$ et $n \in S$ (pour plus de détails on pourra voir la preuve du Corollaire 1.18). □

4.2 Norme essentielle des opérateurs de Cesàro

Dans cette partie, nous calculons la norme essentielle des opérateurs de Cesàro (discrets et continus) entre différents espaces de Banach à l'aide des résultats préliminaires établis dans le premier chapitre.

4.2.1 Opérateurs de Cesàro classiques

Définition 4.14. Pour $p \in (1, +\infty]$, on définit l'opérateur de Cesàro :

$$\Gamma_p : \begin{cases} L^p & \longrightarrow & L^p \\ f & \longmapsto & \Gamma(f), \end{cases}$$

où pour tout $x \in (0, 1)$, $\Gamma(f)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. De même, on définit l'opérateur discret de Cesàro :

$$\gamma_p : \begin{cases} \ell^p & \longrightarrow & \ell^p \\ f & \longmapsto & \gamma(f), \end{cases}$$

où $\gamma((x_k)_k) = \Big(\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k\Big)_n$.

Remarque 4.15. D'après les inégalités de Hardy, Γ_p et γ_p sont des opérateurs bornés si $p > 1$. Plus précisément, on a $\|\Gamma_p\| = p'$ et $\|\gamma_p\| = p'$ (voir Th. 4.2). Par ailleurs, les opérateurs Γ_1 et γ_1 ne sont pas bornés : en effet, on peut remarquer que la fonction $f(t) = t^{-1} \log(t)^{-1.5} \in L^1$ satisfait $\Gamma(f) \notin L^1$, et la suite $(u_n) = (n^{-1} \log(n)^{-1.5})_{n \geq 2} \in \ell^1$ satisfait $\gamma((u_n)) \notin \ell^1$.

Nous calculons la norme essentielle des opérateurs Γ_p et γ_p.

Théorème 4.16. *Soit $p \in (1, +\infty)$. Alors on a*

$$\|\Gamma_p\|_e = \|\Gamma_p\| = p',$$

où $p' = \frac{p}{p-1}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(\Gamma_p) = p'$.

Démonstration. L'inégalité de Hardy donne la borne supérieure, on a :

$$\|\Gamma_p\|_e \leq \|\Gamma_p\| \leq p'.$$

Pour montrer la borne inférieure, nous allons appliquer le Théorème 1.49 : il s'agit de trouver une suite (h_n) dans la boule unité de L^p telle que les $\Gamma_p(h_n)$ se concentrent sur des "petits intervalles". Définissons les ensembles $A_k = [0, 1/k]$ et la suite $(h_n)_n \in L^p$ par $h_n(t) = (p\varepsilon_n)^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}+\varepsilon_n}$, où $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|h_n\|_p \leq 1$. Les ensembles A_k satisfont $\lambda\big(\bigcap A_k\big) = 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Gamma_p(h_n)\|^p_{L^p(A_k)} &= \int_0^{1/k} \left(\frac{1}{x} \int_0^x (p\varepsilon_n)^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}+\varepsilon_n} dt\right)^p dx \\ &= p\varepsilon_n \int_0^{1/k} \frac{x^{-1+p\varepsilon_n}}{(\frac{1}{p'} + \varepsilon_n)^p} dx \\ &= \frac{(1/k)^{p\varepsilon_n}}{(\frac{1}{p'} + \varepsilon_n)^p}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout k fixé on obtient $\liminf\limits_{n \to \infty} \|\Gamma_p(h_n)\|_{L^p(A_k)} \geq p'$ et le Théorème 1.49 donne la borne inférieure. $\square$

On traite le cas discret avec un méthode similaire, mais les calculs sont plus difficiles.

Théorème 4.17. *Soit $p \in (1, +\infty)$, alors on a*

$$\|\gamma_p\|_e = \|\gamma_p\| = p',$$

où $p' = \frac{p}{p-1}\cdot$ En particulier, les nombres d'approximation de γ_p valent tous p'.

Démonstration. D'après l'inégalité de Hardy, on a la borne supérieure :

$$\|\gamma_p\|_e \leq \|\gamma_p\| \leq p'.$$

Nous allons montrer la borne inférieure en considérant une suite $(a^{(m)})_m$ d'éléments de la boule unité de ℓ^p tels que les $\gamma_p(a^{(m)})$ se concentrent vers l'infini. Pour $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, la suite $a^{(m)} = (a_n^{(m)})_n \in \ell^p$ est définie par :

$$a_n^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{(p\varepsilon)^{\frac{1}{p}} m^{\varepsilon}}{n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}} & \text{si } n \geq m. \end{cases}$$

Nous allons tout d'abord estimer la norme de $a^{(m)}$:

$$\|a^{(m)}\|_{\ell^p}^p = (p\varepsilon) m^{p\varepsilon} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^{1+p\varepsilon}} \underset{m\to+\infty}{\sim} (p\varepsilon) m^{p\varepsilon} \int_m^{\infty} \frac{1}{x^{1+p\varepsilon}} dx = 1.$$

D'autre part, l'image $\gamma(a^{(m)})$ est donnée par :

$$\big(\gamma_p(a^{(m)})\big)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{(p\varepsilon)^{\frac{1}{p}} m^{\varepsilon}}{n+1} \displaystyle\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{p}+\varepsilon}} & \text{si } n \geq m. \end{cases}$$

Rappelons que d'après les comparaisons entre séries et intégrales de Riemann, on a :

$$\sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k^{\beta}} \geq \int_a^{b+1} \frac{1}{x^{\beta}} dx \geq \frac{(b+1)^{1-\beta} - a^{1-\beta}}{1-\beta}, \tag{4.1}$$

pour tous entiers $b \geq a \geq 2$ et tout réel $\beta \neq 1$. De plus si $\beta > 1$ on a aussi :

$$\sum_{k=a}^{+\infty} \frac{1}{k^{\beta}} \leq \int_{a-1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta}} dx \leq \frac{1}{(a-1)^{\beta-1}(\beta-1)}. \tag{4.2}$$

Nous estimons maintenant la norme de $\gamma_p(a^{(m)})$:

$$\begin{aligned}
\|\gamma_p(a^{(m)})\|_{\ell^p}^p &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(p\varepsilon) m^{p\varepsilon}}{(n+1)^p} \left(\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{p}+\varepsilon}} \right)^p \\
&\geq \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(p\varepsilon) m^{p\varepsilon}}{(n+1)^p} \left(\frac{(n+1)^{\frac{1}{p'}-\varepsilon} - m^{\frac{1}{p'}-\varepsilon}}{\frac{1}{p'} - \varepsilon} \right)^p \\
&= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(p\varepsilon) m^{p\varepsilon}}{(n+1)^{1+p\varepsilon}} \frac{(p')^p}{(1-p'\varepsilon)^p} \Big(1 - (\frac{m}{n+1})^{\frac{1}{p'}-\varepsilon}\Big)^p \\
&\geq \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(p\varepsilon) m^{p\varepsilon}}{(n+1)^{1+p\varepsilon}} \frac{(p')^p}{(1-p'\varepsilon)^p} \Big(1 - p(\frac{m}{n+1})^{\frac{1}{p'}-\varepsilon}\Big) \\
&= \frac{(p')^p}{(1-p'\varepsilon)^p} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(p\varepsilon) m^{p\varepsilon}}{(n+1)^{1+p\varepsilon}} - \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{p^2 \varepsilon m^{p\varepsilon+\frac{1}{p'}-\varepsilon}}{(n+1)^{1+p\varepsilon+\frac{1}{p'}-\varepsilon}} \right).
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (4.1) quand $b \to \infty$ et (4.2), l'expression ci-dessus se réduit à :

$$\|\gamma_p(a^{(m)})\|_{\ell^p}^p \geq \frac{p'^p}{(1-p'\varepsilon)^p}\left(\left(\frac{m}{m+1}\right)^{p\varepsilon} - \frac{p^2\varepsilon}{p\varepsilon+\frac{1}{p'}-\varepsilon}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{p\varepsilon+\frac{1}{p'}-\varepsilon}\right).$$

Quand $\varepsilon \to 0$ et $m \to \infty$, on obtient $\lim_{m\to\infty} \|\gamma_p(a^{(m)})\|_{\ell^p} \geq p'$. Soit $A_k = [k, +\infty) \cap \mathbb{N}$ et $h_m = a^{(m)}$. D'une part on a $\bigcap A_k = \emptyset$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$\forall m \geq k, \quad \|\gamma_p(a^{(m)})\|_{\ell^p(A_k)} = \|\gamma_p(a^{(m)})\|_{\ell^p},$$

car le support de $\gamma_p(a^{(m)})$ est inclus dans $\mathbb{N} \cap [m, +\infty)$. D'après le Théorème 1.49 et en prenant la limite quand $m \to +\infty$, on obtient $\|\gamma_p\|_e = p'$. □

Nous traitons maintenant les cas où $p = +\infty$.

Théorème 4.18. *Soit $\Gamma_\infty : L^\infty \longrightarrow L^\infty$ l'opérateur de Cesàro. Alors on a*

$$\|\Gamma_\infty\|_{e,w} = \|\Gamma_\infty\|_e = \|\Gamma_\infty\| = 1.$$

En particulier, $a_n(\Gamma_\infty) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Tout d'abord, on obtient directement : $\|\Gamma_\infty\|_{e,w} \leq \|\Gamma_\infty\|_e \leq \|\Gamma_\infty\| = 1$. Pour démontrer la borne inférieure, nous fixons $\varepsilon \in (0,1)$ et nous allons définir une suite de fonction $(h^{(n)})_n \in L^\infty$, telle que toute bloc-sous-suite de $\Gamma_\infty(h^{(n)})$ est $(2-2\varepsilon)$-séparée dans L^∞. Alors, le Lemme 1.45 (ii), entraînera $\|\Gamma_\infty\|_{e,w} \geq 1-\varepsilon$, et donc le résultat.

Soit $\varepsilon > 0$ et $(h_n)_n \in B_{L^\infty}$ la suite de fonctions suivantes :

$$h_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq \varepsilon^n \\ 1 & \text{si } x > \varepsilon^n. \end{cases}$$

La suite $H_n := \Gamma_\infty(h_n)$ satisfait $H_n = -1$ sur $[0, \varepsilon^n]$ et $H_n(x) = \dfrac{x - 2\varepsilon^n}{x}$ si $x > \varepsilon^n$. Soit $(\widetilde{H}_m)_m$ une bloc-sous-suite de $(H_n)_n$ définie par $\widetilde{H}_m = \sum_{j \in I_m} c_j H_j$ (voir la Définition 1.43). Pour deux entiers k, l avec $l > k$, on a

$$H_l(\varepsilon^k) = 1 - 2\frac{\varepsilon^l}{\varepsilon^k} \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Soient m, n deux entiers tels ques $m < n$, et soit $k = \max I_m$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{H}_n - \widetilde{H}_m\|_\infty &\geq |\widetilde{H}_n(\varepsilon^k) - \widetilde{H}_m(\varepsilon^k)| \\
&= \Big|\sum_{l \in I_n} c_l H_l(\varepsilon^k) - \sum_{j \in I_m} c_j H_j(\varepsilon^k)\Big| \\
&\geq (1-2\varepsilon)\sum_{l \in I_n} c_l - \sum_{j \in I_m} c_j(-1) \\
&= 2 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien $\|\Gamma_\infty\|_{e,w} \geq 1$. □

La même méthode s'adapte pour traiter le cas discret.

Théorème 4.19. *Soit $\gamma_\infty : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ l'opérateur de Cesàro discret. On a*

$$\|\gamma_\infty\|_{e,w} = \|\gamma_\infty\|_e = \|\gamma_\infty\| = 1.$$

En particulier, tous les nombres d'approximation de γ_∞ sont égaux à 1.

Démonstration. Les majorations sont immédiates, on a : $\|\gamma_\infty\|_{e,w} \leq \|\gamma_\infty\|_e \leq \|\gamma_\infty\| = 1$. Pour démontrer la borne inférieure on suivra la démarche de la preuve du Théorème 4.18. Soient $\varepsilon > 0$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous considérons la suite $a^{(n)} \in \ell^\infty$ définie par $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}^*}$, où $a_k^{(n)} = -1$ si $k \leq r^n$, et $a_k^{(n)} = 1$ si $k > r^n$. En notant $A^{(n)} := \gamma_\infty(a^{(n)})$ et $A^{(n)} = (A_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$A_i^{(n)} = \begin{cases} -1 & \text{si } i \leq r^n \\ \dfrac{i - 2r^n}{i} & \text{si } i > r^n. \end{cases}$$

Soit $(\widetilde{A}^{(m)})_m$ une bloc-sous-suite de $A^{(n)}$ définie par $\widetilde{A}^{(m)} = \sum_{j\in I_m} c_j A^{(j)}$ (voir la Définition 1.43). Grâce au choix de la suite, on a pour tous j, k tels que $j < k$:

$$A_{r^k}^{(j)} = 1 - 2\frac{r^j}{r^k} \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Soient m, n deux entiers tels que $m < n$, et soit $k = \min I_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|\widetilde{A}^{(m)} - \widetilde{A}^{(n)}\|_\infty &\geq |\widetilde{A}_{r^k}^{(m)} - \widetilde{A}_{r^k}^{(n)}| \\ &= \Big| \sum_{j\in I_m} c_j A_{r^k}^{(j)} - \sum_{l\in I_n} c_l A_{r^k}^{(l)} \Big| \\ &\geq (1 - 2\varepsilon) \sum_{j\in I_m} c_j - \sum_{l\in I_n} c_l(-1) \\ &= 2 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.45 (ii), on obtient bien $\|\gamma_\infty\|_{e,w} \geq 1$. □

Comme nous l'avons vu, pour tout $p \in (1, +\infty]$, l'opérateur Γ_p n'est pas compact, mais la situation est différente quand on le restreint à un espace de Müntz M_Λ^p.

Remarque 4.20. L'opérateur de Cesàro a la propriété de stabiliser l'espace des polynômes de Müntz. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ et $y_n \in M(\Lambda)$ le monôme défini par $y_n(t) = t^{\lambda_n}$, on a :

$$\Gamma(y_n) = (\lambda_n + 1)^{-1} y_n \in Span(y_n).$$

Ainsi, on peut l'étudier comme un opérateur $\Gamma_p^\Lambda : M_\Lambda^p \to M_\Lambda^p$. Dans l'article [7], les auteurs ont remarqué que l'opérateur "critique" suivant :

$$\Gamma_\Lambda : \begin{cases} M_\Lambda^1 & \longrightarrow & M_\Lambda^\infty \\ f & \longmapsto & \Gamma(f), \end{cases}$$

est borné, mais qu'il n'est ni compact, ni faiblement compact. En effet, ils ont démontré qu'on a : $\|\Gamma_\Lambda\|_e = \frac{1}{2}$. La restriction de Γ à l'espace de Müntz M_Λ^1 est à valeurs dans $M_\Lambda^\infty \subset \mathcal{C}$, alors que l'opérateur de Cesàro n'est même pas borné si on le voit comme un opérateur sur L^1 à valeurs dans L^1.

Proposition 4.21. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et Λ une suite satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition. Alors l'opérateur restreint suivant :*

$$\Gamma_p^\Lambda : \begin{cases} M_\Lambda^p & \longrightarrow & M_\Lambda^p \\ f & \longmapsto & \Gamma(f), \end{cases}$$

est compact.

Démonstration. D'après [7, Prop. 4.2], l'opérateur $\Gamma_\Lambda : M_\Lambda^1 \to M_\Lambda^\infty, f \mapsto \Gamma(f)$ est borné (mais pas compact). Alors on a la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} M_\Lambda^p \arrow[r, "\Gamma_p^\Lambda"] \arrow[d, "i_{p,1}"'] & M_\Lambda^p \\ M_\Lambda^1 \arrow[r, "\Gamma_\Lambda"'] & M_\Lambda^\infty. \arrow[u, "i_{\infty,p}"'] \end{tikzcd}$$

D'après la Proposition 1.20, au moins l'un des opérateurs $i_{\infty,p}$ ou $i_{p,1}$ est compact, et donc Γ_p^Λ est compact. □

4.2.2 Les opérateurs de Cesàro sur les espaces de Cesàro

Dans cette partie, nous allons étudier les opérateurs de Cesàro définis, sur les espaces de Cesàro Ces_p et à valeurs dans les espaces L^p correspondants. Nous traitons les questions analogues des opérateurs de Cesàro discrets. Nous allons aussi nous intéresser à des restrictions de ces opérateurs à des sous-espaces de Müntz de Ces_p (Définition 4.9).

Définition 4.22. Soit $p \in [1, +\infty]$. L'opérateur $\Gamma_{C(p)}$ est défini par :

$$\Gamma_{C(p)} : \begin{cases} \mathrm{Ces_p} & \longrightarrow & L^p \\ f & \longmapsto & \Gamma(f). \end{cases}$$

De même on définit l'opérateur discret $\gamma_{c(p)}$ de la manière suivante :

$$\gamma_{c(p)} : \begin{cases} \mathrm{ces_p} & \longrightarrow & \ell^p \\ u & \longmapsto & \gamma(u), \end{cases}$$

pour tout $p \in (1, +\infty]$.

Rappelons que pour $p \in [1, +\infty]$ (resp. pour $p \in (1, +\infty]$) l'opérateur $\Gamma_{C(p)}$ (resp. $\gamma_{c(p)}$) est naturellement bien défini, borné et de norme 1. De plus, il transforme l'ensemble des fonctions (resp. suites) positives de manière isométrique.

Théorème 4.23. *Pour tout $p \in (1, +\infty)$, on a :*

1) $\|\Gamma_{C(p)}\|_e = \|\Gamma_{C(p)}\| = 1.$

2) $\|\gamma_{c(p)}\|_e = \|\gamma_{c(p)}\| = 1.$

3) $\|\Gamma_{C(1)}\|_{e,w} = \|\Gamma_{C(1)}\|_e = \|\Gamma_{C(1)}\| = 1.$

4) $\|\Gamma_{C(\infty)}\|_{e,w} = \|\Gamma_{C(\infty)}\|_e = \|\Gamma_{C(\infty)}\| = 1.$

5) $\|\gamma_{c(\infty)}\|_{e,w} = \|\gamma_{c(\infty)}\|_e = \|\gamma_{c(\infty)}\| = 1.$

En particulier, les nombres d'approximation de tous ces opérateurs valent 1.

Démonstration. Comme $\|\Gamma_{C(p)}\|_e \le \|\Gamma_{C(p)}\| \le 1$, nous avons seulement besoin de démontrer la borne inférieure de la norme essentielle. On a : $\Gamma_p = \Gamma_{C(p)} \circ J_p$, où $J_p : L^p \to \mathrm{Ces}_p$ est l'inclusion canonique de L^p dans Ces_p. Cette factorisation entraîne aisément :

$$\|\Gamma_p\|_e \le \|\Gamma_{C(p)}\|_e \|J_p\|.$$

D'après l'inégalité de Hardy ([33, Th. 327]) et le Théorème 4.16, on a $\|J_p\| = \|\Gamma_p\|_e = p'$ d'où on obtient : $1 \le \|\Gamma_{C(p)}\|_e$ et le point 1) est démontré. En suivant les mêmes étapes, le Théorème 4.17 permet de traiter le cas discret et d'obtenir le point 2).

Pour démontrer le point 3), on a la majoration comme d'usage :

$$\|\Gamma_{C(1)}\|_{e,w} \le \|\Gamma_{C(1)}\|_e \le \|\Gamma_{C(1)}\| \le 1.$$

La borne inférieure de $\|\Gamma_{C(1)}\|_{e,w}$ provient du Théorème 1.49 appliqué aux ensembles $A_k = [1-\frac{1}{k}, 1]$ et à la suite normalisée $(h_n) \in \mathrm{Ces}_1$, définie par $h_n(x) = (\lambda_n+1)^2 x^{\lambda_n}$. La mesure des ensembles A_k tend vers 0 quand $k \to +\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a :

$$\|\Gamma_{C(1)}(h_n)\|_{L^1(A_k)} = \int_{1-\frac{1}{k}}^{1} \Big(\frac{1}{x}\int_0^x (\lambda_n+1)^2 t^{\lambda_n}\,dt\Big)dx = 1 - \Big(1-\frac{1}{k}\Big)^{\lambda_n+1}.$$

Cette quantité tend vers 1 quand $n \to +\infty$, et on obtient $\|\Gamma_{C(1)}\|_{e,w} \geq 1$ comme voulu.

Pour démontrer le point 4), on a $\|\Gamma_{C(\infty)}\|_{e,w} \leq \|\Gamma_{C(\infty)}\|_e \leq \|\Gamma_{C(\infty)}\| \leq 1$, et comme dans la preuve du point 1), le Théorème 4.18 et la factorisation donnent :

$$\|\Gamma_{C(\infty)}\|_{e,w}\|J_\infty\| \geq \|\Gamma_{C(\infty)} \circ J_\infty\|_{e,w} = \|\Gamma_\infty\|_{e,w} = 1.$$

De la même manière, on traite le cas discret 5) à l'aide du Théoreme 4.19. □

Le résultat précédent montre que les opérateurs $\Gamma_{C(p)}$ et $\gamma_{c(p)}$ sont définis sur les bons espaces pour se comporter, du point de vue de la norme essentielle, comme des isométries. Mais ce ne sont pas des isomorphismes car les espaces de Cesàro Ces_p ne sont isomorphes à aucun L^q (voir [10]). Par ailleurs, cela rejoint les résultats de [20], dans lequel les auteurs démontrent que les opérateurs de Cesàro définis d'une manière analogue sur un espace Ces_X à valeurs dans X ne sont jamais compacts. Nous allons voir ce qui se passe lorsque l'on restreint ces opérateurs aux espaces de Müntz-Cesàro au départ, et aux espaces de Müntz à l'arrivée.

Définition 4.24. Soient $p \in [1, +\infty]$ et Λ une suite satisfaisant le critère de Müntz et la gap-condition. L'opérateur $\Gamma^\Lambda_{C(p)}$ est défini par :

$$\Gamma^\Lambda_{C(p)} : \begin{cases} M_\Lambda^{C(p)} & \longrightarrow & M^p_\Lambda \\ f & \longmapsto & \Gamma(f). \end{cases}$$

Pour commencer, nous calculons la norme essentielle des opérateurs $\Gamma^\Lambda_{C(p)}$.

Proposition 4.25. *Soit $p \in [1, +\infty)$ et Λ une suite qui satisfait la condition de Müntz et la gap-condition. Alors on a :*

1) $\|\Gamma^\Lambda_{C(p)}\|_e = 1$.

2) $\|\Gamma^\Lambda_{C(\infty)}\|_e = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration. Comme l'opérateur de Cesàro $\Gamma_{C(p)} : \mathrm{Ces}_p \to L^p$ est borné sur Ces_p et comme il satisfait $\Gamma_{C(p)}(M(\Lambda)) = M(\Lambda)$, on obtient :

$$\Gamma_{C(p)}\Big(\overline{M(\Lambda)}^{\mathrm{Ces}_p}\Big) \subset \overline{\Gamma_{C(p)}(M(\Lambda))}^{L^p} = M^p_\Lambda.$$

Ainsi, $\Gamma^\Lambda_{C(p)}$ est bien défini, et il est borné car c'est la restriction de $\Gamma_{C(p)}$. De plus on a directement $\|\Gamma^\Lambda_{C(p)}\|_e \leq \|\Gamma^\Lambda_{C(p)}\| \leq \|\Gamma_{C(p)}\| \leq 1$. Considérons par ailleurs l'opérateur $\chi_p : M_\Lambda^{C(p)} \to L^p$, défini par $f \mapsto \Gamma(f)$. On a la factorisation :

$$\chi_p = j_p \circ \Gamma^\Lambda_{C(p)},$$

où $j_p : M^p_\Lambda \to L^p$ est l'inclusion de M^p_Λ dans L^p. On peut en déduire facilement :

$$\|\chi_p\|_e \leq \|\Gamma^\Lambda_{C(p)}\|_e.\|j_p\| = \|\Gamma^\Lambda_{C(p)}\|_e,$$

donc nous avons seulement besoin de vérifier que $\|\chi_p\|_e \geq 1$. Comme χ_p est à valeurs dans L^p, nous pouvons appliquer le Théorème 1.49 avec $\Omega = [0,1]$, $A_k = [1-\frac{1}{k}, 1]$, $\alpha = 1$ et à la suite de fonctions normalisées $h_n(t) = (\lambda_n+1)(p\lambda_n+1)^{\frac{1}{p}} t^{\lambda_n} \in M_\Lambda^{C(p)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé on a :

$$\begin{aligned} \|\chi_p(h_n)\|^p_{L^p(A_k)} &= \int_{1-\frac{1}{k}}^{1} (p\lambda_n+1)\Big(\frac{1}{x}\int_0^x (\lambda_n+1)t^{\lambda_n}dt\Big)^p dx \\ &= 1 - \Big(1-\frac{1}{k}\Big)^{p\lambda_n+1}. \end{aligned}$$

On obtient bien $\|\chi_p\|_e \geq 1$ et la preuve du point 1) est complète.

Traitons maintenant le cas "$p = +\infty$". Tout d'abord, l'opérateur $\Gamma^\Lambda_{C(\infty)}$ est borné d'après la même raisonnement que pour $\Gamma^\Lambda_{C(p)}$. De plus, on a en toute généralité

$$\forall g \in \mathrm{Ces}_\infty, \quad \|g\|_{C(\infty)} \geq \|g\|_1.$$

Ainsi, $\Gamma^\Lambda_{C(\infty)}$ se factorise de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} M_\Lambda^{\mathrm{Ces}_\infty} \arrow[rr, "\Gamma^\Lambda_{C(\infty)}"] \arrow[dr, "J_\Lambda"'] & & M_\Lambda^\infty \\ & M_\Lambda^1 \arrow[ur, "\Gamma_\Lambda"'] & \end{tikzcd}$$

où J_Λ est la restriction de l'inclusion canonique de Ces_∞ dans L^1, et Γ_Λ est la restriction de l'opérateur de Cesàro sur M_Λ^1 à valeurs dans M_Λ^∞. La norme essentielle de Γ_Λ est calculée dans [7, Th. 4.3], elle vaut $\frac{1}{2}$. Cette factorisation entraîne :

$$\|\Gamma^\Lambda_{C(\infty)}\|_e \leq \|J_\Lambda\|.\|\Gamma_\Lambda\|_e = \frac{1}{2},$$

on obtient donc la borne supérieure.

Pour la borne inférieure, on choisit une sous-suite $(\gamma_n)_n \subset \Lambda$ telle que $\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. On considère la suite normalisée $(f_n) \in M_\Lambda^{C(\infty)}$ définie par $f_n(x) = (\lambda_n+1)x^{\lambda_n}$. Pour tout $m > n$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Gamma(f_n) - \Gamma(f_m)\|_\infty &= \|x^{\gamma_n} - x^{\gamma_m}\|_\infty \\ &= \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}}\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big), \end{aligned}$$

où α est le rapport $\alpha = \gamma_m/\gamma_n$, d'après le Lemme 2.33. En utilisant l'hypothèse sur la suite $(\gamma_n)_n$, on remarque que cette quantité tend vers 1 quand $n, m \to +\infty$ et $n < m$. D'après le Lemme 1.45 on obtient $\|\Gamma^\Lambda_{C(\infty)}\|_e \geq \frac{1}{2}$ et la preuve du point 2) est complète. □

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier où Λ est lacunaire pour obtenir des résultats plus précis sur la géométrie des espaces de Müntz-Cesàro.

Théorème 4.26. *Soit $p \in [1, +\infty)$. Si Λ est lacunaire, alors $\Gamma^\Lambda_{C(p)} : M_\Lambda^{C(p)} \to M_\Lambda^p$ est un isomorphisme. En particulier, $M_\Lambda^{C(p)}$ est isomorphe à ℓ^p dans ce cas.*

De plus, il existe deux constantes $d_1, d_2 \in \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall b \in c_{00}, \quad d_1\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{|b_n|^p}{\lambda_n^{p+1}}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big\|\sum_{n\geq 0} b_n t^{\lambda_n}\Big\|_{C(p)} \leq d_2\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{|b_n|^p}{\lambda_n^{p+1}}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Supposons que Λ est lacunaire et fixons une fonction $f \in M(\Lambda)$ de la forme $f(t) = \sum_n b_n t^{\lambda_n}$. D'après la majoration du théorème de Gurariy-Macaev dans L^p, il existe une constante C_2 qui ne dépend que de p et Λ telle qu'on a :

$$\begin{aligned}\|f\|_{C(p)}^p &\leq \int_0^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x \sum_n |b_n| t^{\lambda_n} dt\Big)^p dx \\ &= \Big\| \sum_n \frac{|b_n|}{\lambda_n+1} x^{\lambda_n} \Big\|_p^p \\ &\leq C_2^p \sum_n \frac{|b_n|^p}{\lambda_n^{1+p}}.\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\|\Gamma(f)\|_p \leq \|\Gamma(|f|)\|_p = \|f\|_{C(p)}$ et $\Gamma(f) \in M(\Lambda)$, on a :

$$\begin{aligned}\|f\|_{C(p)}^p \geq \|\Gamma(f)\|_p^p &= \Big\| \sum_n \frac{b_n}{\lambda_n+1} x^{\lambda_n} \Big\|_p^p \\ &\geq \Big(\frac{C_1}{2}\Big)^p \sum_n \frac{|b_n|^p}{\lambda_n^{1+p}},\end{aligned}$$

d'après la minoration du théorème de Gurariy-Macaev dans L^p, et la constante C_1 ne dépend que de p et Λ. On obtient bien l'encadrement de $\|f\|_{C(p)}$ annoncé. Cette estimation entraîne que $\Gamma_{C(p)}^{\Lambda}$ est injectif à image fermée. De plus, comme $\Gamma(M(\Lambda)) = M(\Lambda)$, l'opérateur $\Gamma_{C(p)}^{\Lambda}$ est à image dense dans M_{Λ}^p, donc c'est un isomorphisme. □

Remarque 4.27. Dans Ces_∞, on a aussi un théorème de Gurariy-Macaev pour les suites de monômes qui s'accumulent en $+\infty$: d'après la Proposition 4.10, les normes $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_{C(\infty)}$ sont équivalentes sur $M(\Lambda)$. En particulier, pour toute suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 0}$ lacunaire, il existe deux constantes $d_1, d_2 \in \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall b \in c_{00}, \quad d_1 \sum_{n\geq 0} \frac{|b_n|}{\lambda_n} \leq \Big\| \sum_{n\geq 0} b_n t^{\lambda_n} \Big\|_{C(\infty)} \leq d_2 \sum_{n\geq 0} \frac{|b_n|}{\lambda_n},$$

d'après le théorème de Gurariy-Macaev dans L^1.

4.3 Opérateurs de multiplication

Dans cette dernière partie, nous allons étudier les opérateurs de multiplication suivants :

$$T_\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Ces}_p & \longrightarrow & \mathrm{Ces}_p \\ f & \longmapsto & f\psi \end{array} \right.$$

définis sur les espaces de Cesàro, où ψ est une fonction bornée sur $[0,1]$. Nous considérons aussi la restriction de T_ψ sur des espaces de Müntz-Cesàro. Nous notons λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Le point de départ de ce travail est le résultat suivant :

Proposition 4.28. [1, Theorem 2.1] *Soient $p \in [1,+\infty]$ et ψ une fonction mesurable sur $[0,1]$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour toute fonction $f \in \mathrm{Ces}_p$, on a $T_\psi(f) \in \mathrm{Ces}_p$.

(ii) L'opérateur T_ψ est borné.

(iii) La fonction ψ est essentiellement bornée sur $[0,1]$.

De plus, dans chacun de ces cas on a : $\|T_\psi\| = \|\psi\|_\infty$.

Les auteurs ont démontré ce résultat lorsque p est fini mais leurs arguments s'adaptent facilement pour $p = +\infty$. Avec des méthodes utilisées dans ce chapitre, on peut aussi calculer la norme essentielle de ces opérateurs.

Théorème 4.29. *Soit $\psi \in L^\infty([0,1])$ et $T_\psi : \mathrm{Ces}_p([0,1]) \to \mathrm{Ces}_p([0,1])$; $f \mapsto f\psi$ l'opérateur de multiplication. Alors on a*

$$\|T_\psi\|_e = \|T_\psi\| = \|\psi\|_\infty.$$

En particulier, les nombres d'approximation de T_ψ valent tous $\|\psi\|_\infty$.

Démonstration. Comme d'habitude, on a $\|T_\psi\|_e \le \|T_\psi\| = \|\psi\|_\infty$ d'après la Prop. 4.28, et donc on a seulement besoin de vérifier que $\|T_\psi\|_e \ge \|\psi\|_\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit l'ensemble A_ε suivant :

$$A_\varepsilon = \{t \in [0,1], |\psi(t)| \ge \|\psi\|_\infty - \varepsilon\}.$$

Comme $\lambda(A_\varepsilon) > 0$, au moins un des deux ensembles $[0,\frac{1}{2}] \cap A_\varepsilon$ ou $[\frac{1}{2},1] \cap A_\varepsilon$ a une mesure de Lebesgue strictement positive. Disons que c'est le premier, et posons :

$$\beta = \inf\{\ x \in \big[0,1/2\big],\quad \lambda(\big[x,1/2\big] \cap A_\varepsilon) = 0\}.$$

Le nombre β satisfait $0 < \beta < 1$: en effet, si on suppose par l'absurde que $\beta = 0$, on obtient $\lambda(A_\varepsilon \cap [0,\frac{1}{2}]) = 0$, ce qui est faux par hypothèse. Dans le deuxième cas, on définit $\beta' = \sup\{x \in [1/2,1], \lambda([1/2,x] \cap A_\varepsilon) = 0\}$, et β' est aussi dans l'intervalle $(0,1)$ pour les mêmes raisons. Maintenant nous considérons une suite (a_n) strictement croissante qui tend vers β quand $n \to +\infty$, et on définit les ensembles $I_n = [a_n, a_{n+1}) \cap A_\varepsilon$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Par définition de β, il existe une infinité d'ensembles I_n tels que $\lambda(I_n) > 0$, et quitte à extraire nous supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda(I_n) > 0$. Finalement, nous définissons les fonctions normalisées $f_n = \dfrac{\mathbb{1}_{I_n}}{\|\mathbb{1}_{I_n}\|_{C(p)}} \in \mathrm{Ces}_p$.

Supposons tout d'abord que p est fini. Pour $n < m$ on a :

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(f_n) - T_\psi(f_m)\|_{C(p)}^p &= \int_{a_n}^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x |\psi(t)|.\Big|\frac{\mathbb{1}_{I_n}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_n}\|} - \frac{\mathbb{1}_{I_m}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_m}\|}\Big|dt\Big)^p dx \\
&\ge (\|\psi\|_\infty - \varepsilon)^p \int_\beta^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x \Big(\frac{\mathbb{1}_{I_n}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_n}\|} + \frac{\mathbb{1}_{I_m}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_m}\|}\Big)dt\Big)^p dx \\
&= (\|\psi\|_\infty - \varepsilon)^p \Big(\frac{\lambda(I_n)}{\|\mathbb{1}_{I_m}\|} + \frac{\lambda(I_m)}{\|\mathbb{1}_{I_m}\|}\Big)^p \int_\beta^1 \frac{dx}{x^p}.
\end{aligned}$$

La minoration ci dessus vient du fait qu'on a $I_n \subset A_\varepsilon$ pour tout n et que les intervalles $(I_n)_n$ sont disjoints, et la dernière égalité est due à $\beta > \sup I_n$ pour tout n. D'autre part, on a :

$$\|\mathbb{1}_{I_n}\|_{C(p)}^p = \int_{a_n}^\beta \Big(\frac{1}{x}\lambda([0,x] \cap I_n)\Big)^p dx + \lambda(I_n)^p \int_\beta^1 \frac{dx}{x^p},$$

et comme $a_n \to \beta < 1$ on obtient aisément :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda(I_n)}{\|\mathbb{1}_{I_n}\|_{C(p)}} = \Big(\int_\beta^1 \frac{dx}{x^p}\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m > n \ge n_0$ on a :

$$\|T_\psi(f_n) - T_\psi(f_m)\|_{C(p)} \ge (\|\psi\|_\infty - \varepsilon)(2 - \varepsilon).$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, le Lemme 1.45 entraîne $\|T_\psi\|_e \ge \|\psi\|_\infty$, ce qui conclut la preuve lorsque p est fini.

Supposons maintenant que $p = +\infty$ et fixons encore deux entiers n, m avec $n < m$. Nous calculons la distance de $T_\psi(f_n)$ à $T_\psi(f_m)$ dans Ces_∞ :

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(f_n) - T_\psi(f_m)\|_{C(\infty)} &= \sup_{x\in(0,1]} \frac{1}{x}\int_0^x |\psi(t)|.\Big|\frac{\mathbb{1}_{I_n}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_n}\|} - \frac{\mathbb{1}_{I_m}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_m}\|}\Big|dt \\
&\ge (\|\psi\|_\infty - \varepsilon) \sup_{x\in[0,1)} \frac{1}{x}\int_0^x \Big(\frac{\mathbb{1}_{I_n}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_n}\|} + \frac{\mathbb{1}_{I_m}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_m}\|}\Big)dt,
\end{aligned}$$

car les intervalles I_n sont disjoints et inclus dans A_ε. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble I_k satisfait $\inf(I_k) = a_k$, et on obtient alors

$$\|\mathbb{1}_{I_k}\|_{C(\infty)} \leq \frac{1}{a_k}\lambda(I_k).$$

Cela entraîne :

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(f_n) - T_\psi(f_m)\|_{C(\infty)} &\geq (\|\psi\|_\infty - \varepsilon)\frac{1}{a_{m+1}}\int_0^{a_{m+1}}\Big(\frac{\mathbb{1}_{I_n}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_n}\|} + \frac{\mathbb{1}_{I_m}(t)}{\|\mathbb{1}_{I_m}\|}\Big)dt \\
&= (\|\psi\|_\infty - \varepsilon)\frac{1}{a_{m+1}}\Big(\frac{\lambda(I_n)}{\|\mathbb{1}_{I_n}\|} + \frac{\lambda(I_m)}{\|\mathbb{1}_{I_m}\|}\Big) \\
&\geq (\|\psi\|_\infty - \varepsilon)\frac{a_m + a_n}{a_{m+1}}.
\end{aligned}$$

Lorsque $m, n \to +\infty$ tels que $n < m$, on a $a_n, a_m, a_{m+1} \to \beta > 0$. Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(T(f_n))_{n \geq n_0}$ est $(2-\varepsilon)(\|\psi\|_\infty - \varepsilon)$-séparée, et on en déduit la borne inférieure de $\|T_\psi\|_e$ d'après le Lemme 1.45. □

Nous nous intéressons désormais à la restriction des opérateurs de multiplication aux sous-espaces de Müntz de Ces_∞. En adaptant le Théorème 3.23, on peut voir facilement que si ψ n'est pas constante, alors pour des raisons algébriques, l'ensemble $T_\psi(M(\Lambda))$ n'est pas inclus dans $M_\Lambda^{C(p)}$ en général. Nous considérons donc des opérateurs à valeurs dans Ces_p dans la définition qui suit.

Définition 4.30. Soit Λ une suite satisfaisant la condition de Müntz et $\psi \in L^\infty$. On définit *l'opérateur T_ψ^Λ de multiplication restreint* par :

$$T_\psi^\Lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} M_\Lambda^{C(p)} & \longrightarrow & \mathrm{Ces}_p \\ f & \longmapsto & f\psi \end{array} \right.$$

Sa norme essentielle ne dépend que du comportement de ψ au point 1.

Lemme 4.31. *Soit $p \in [1, +\infty]$, $\Lambda = (\lambda_n)_n$ une suite qui satisfait la condition de Müntz et la gap-condition, et $\psi \in L^\infty$ une fonction continue au point 1.*

Si $\psi(1) = 0$ alors T_ψ^Λ est compact.

Démonstration. Soient $(f_n)_n$ une suite dans la boule unité de $M_\Lambda^{C(p)}$ et $\varepsilon > 0$. Comme ψ est continue et $\psi(1) = 0$, alors il existe $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ tel que pour tout $t \geq 1-\delta$, on a $|\psi(t)| \leq \varepsilon$. D'après le Corollaire 4.13, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge uniformément sur $[0, 1-\delta]$ vers une fonction f dans la boule unité de $M_\Lambda^{C(p)}$.

Supposons tout d'abord que $p = +\infty$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(f_{n_k}) - T_\psi(f)\|_{C(\infty)} &= \sup_{x\in(0,1]}\Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f_{n_k}(t) - f(t)|.|\psi(t)|dt\Big) \\
&= \max\Bigg\{ \sup_{x\in(0,1-\delta]}\Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f_{n_k}(t) - f(t)|.|\psi(t)|dt\Big) \ , \\
&\qquad \sup_{x\in[1-\delta,1]}\Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f_{n_k}(t) - f(t)|.|\psi(t)|dt\Big) \Bigg\} \\
&\leq \|\psi\|_\infty \big\|f_{n_k} - f\big\|_{[0,1-\delta]} + \|\psi\|_{[1-\delta,1]} \sup_{x\in[1-\delta,1]}\Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f_{n_k}(t) - f(t)|dt\Big) \\
&\leq \|\psi\|_\infty \big\|f_{n_k} - f\big\|_{[0,1-\delta]} + \varepsilon\big\|f_{n_k} - f\big\|_{C(\infty)}
\end{aligned}$$

Comme (f_{n_k}) converge uniformément vers f sur $[0, 1-\delta]$ et $f_{n_k}, f \in B_{M_\Lambda^{C(\infty)}}$, on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \|T_\psi(f_{n_k}) - T_\psi(f)\|_{C(\infty)} \leq 2\varepsilon,$$

et ainsi T_ψ^Λ est un opérateur compact sur $M_\Lambda^{C(\infty)}$.

Supposons désormais que p est fini, on a alors :

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(f_{n_k}) - T_\psi(f)\|_{C(p)}^p &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f_{n_k}(t) - f(t)|.|\psi(t)|dt\Big)^p dx \\
&\leq \int_0^{1-\delta} \Big(\frac{1}{x}\int_0^x |f_{n_k} - f|.|\psi(t)|dt\Big)^p dx \\
&+ \int_{1-\delta}^1 \left(\frac{1}{1-\delta}\int_0^{1-\delta} |f_{n_k} - f|.|\psi(t)|dt + \varepsilon\frac{1}{x}\int_{1-\delta}^x |f_{n_k} - f|dt\right)^p dx,
\end{aligned}$$

en utilisant encore $|\psi(t)| \leq \varepsilon$ quand $t \geq 1-\delta$. D'autre part, pour tout $x \leq 1-\delta$, on a

$$\frac{1}{x}\int_0^x \big|f_{n_k}(t) - f(t)\big|.|\psi(t)|dt \leq \|\psi\|_\infty \big\|f_{n_k} - f\big\|_{[0,1-\delta]}.$$

D'après l'estimation $(A+B)^p \leq 2^p(A^p + B^p)$ pour tous $A, B \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(f_{n_k}) - T_\psi(f)\|_{C(p)}^p &\leq \|\psi\|_\infty^p \big\|f_{n_k} - f\big\|_{[0,1-\delta]}^p \Big(1 + \frac{2^p\delta}{(1-\delta)^p}\Big) \\
&+ 2^p\varepsilon^p \int_{1-\delta}^1 \Big(\frac{1}{x}\int_{1-\delta}^x |f_{n_k} - f|dt\Big)^p dx \\
&\leq C\|\psi\|_\infty.\big\|f_{n_k} - f\big\|_{[0,1-\delta]} + 2^{p+1}\varepsilon^p,
\end{aligned}$$

car f_{n_k} et f sont de norme inférieure à 1 dans Ces_p. Comme $\|f_{n_k} - f\|_{[0,1-\delta]} \to 0$ quand $k \to +\infty$, on obtient $T_\psi(f_{n_k}) \to T_\psi(f)$ dans Ces_p quand $k \to +\infty$ et ainsi T_ψ^Λ est compact sur $M_\Lambda^{C(p)}$. □

Nous pouvons maintenant établir le résultat final de ce chapitre.

Théorème 4.32. *Soit $\Lambda = (\lambda_n)$ une suite satisfaisant la condition de Müntz et la gap-condition, $p \in [1, +\infty]$ et $\psi \in L^\infty$.*

Si ψ est continue en 1, alors on a

$$\|T_\psi^\Lambda\|_e = |\psi(1)|.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\psi_n = \psi(t)\chi_n(t)$ où

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, 1-\frac{1}{n}] \\ n(1-t) & \text{si } t \in [1-\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

La fonction ψ_n est continue sur $[0,1]$ et satisfait $\psi_n(1) = 0$. D'après le Lemme 4.31 on sait que $T_{\psi_n}^\Lambda$ est compact pour tout n. On a :

$$\|T_\psi^\Lambda\|_e \leq \|T_\psi^\Lambda - T_{\psi_n}^\Lambda\| \leq \|\psi - \psi_n\|_\infty \leq \|\psi\|_{[1-\frac{1}{n},1]} \underset{n\to\infty}{\to} |\psi(1)|,$$

car ψ est continue en 1. Pour obtenir la borne inférieure voulue pour la norme essentielle de T_ψ^Λ, nous utilisons le Lemme 1.45. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme ψ est continue en 1, il existe $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ tel que pour tout $t \in [1-\delta, 1]$ on a $|\psi(t)| \geq (1-\varepsilon)|\psi(1)|$.

Traitons d'abord le cas $p = +\infty$. On considère une sous-suite $(\gamma_n)_n \subset \Lambda$ qui satisfait $\lim_{n\to+\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = +\infty$. Nous définissons la suite suivante de fonctions normalisées $(\varphi_n)_n \in$

$M_\Lambda^{C(\infty)}$ par $\varphi_n(x) = (\gamma_n + 1)x^{\gamma_n}$. D'après le Théorème 2.24 la suite $(\varphi_n) \in L^1$ est presque isométrique à la base canonique de ℓ^1. En particulier il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m > n \geq n_0$, on a :

$$\int_{1-\delta}^{1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|dt \geq 2 - \varepsilon.$$

En appliquant le Théorème 2.24, on devrait considérer ci dessus une intégrale sur $[0,1]$ au lieu de $[1-\delta, 1]$. Mais comme δ est fixé et que $\|\varphi_n\|_{[0,1-\delta]}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, la formule que nous avons écrite est valide aussi, quitte à prendre n_0 encore plus grand. On obtient alors pour tous $m > n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(\varphi_n) - T_\psi(\varphi_m)\|_{C(\infty)} &= \|\Gamma\left(|\psi(\varphi_n - \varphi_m)|\right)\|_\infty \\
&= \sup_{x\in(0,1]} \frac{1}{x}\int_0^x |(\varphi_n(t) - \varphi_m(t))\psi(t)|dt \\
&\geq \int_{1-\delta}^{1} |(\varphi_n(t) - \varphi_m(t))\psi(t)|dt \\
&\geq (2-\varepsilon)|\psi(1)|\cdot
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.45, on obtient $\|T_\psi^\Lambda\|_e \geq |\psi(1)|(1 - \varepsilon/2)$. Finalement, $\|T_\psi^\Lambda\|_e = |\psi(1)|$ dans ce cas.

Supposons désormais que p est fini. Malheureusement, nous ne pouvons pas appliquer le Théorème 2.24 directement dans ce cas, mais nous adaptons la preuve du Théorème 2.19 pour répondre à ce problème. Soit $\gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de Λ qui satisfait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_{n+1} + 1 \geq \big(\gamma_n + 1\big)^6.$$

On définit les intervalles disjoints $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ par :

$$\alpha_k = \exp\big(-\frac{1}{(\gamma_k+1)^{\frac{1}{2}}}\big) \quad \text{et} \quad \beta_k = \exp\big(-\frac{1}{(\gamma_k+1)^3}\big).$$

Les nombres α_k, β_k satisfont pour $k \in \mathbb{N}$: $\alpha_k \leq \beta_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \cdots$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on définit $\varphi_k(t) = (\gamma_n + 1)(p\gamma_n + 1)^{1/p} t^{\gamma_k}$. La suite $(\varphi_k)_k \in M_\Lambda^{C(p)}$ est normalisée et chaque fonction φ_k est concentrée dans l'intervalle J_k dans un sens que nous allons préciser. Tout d'abord, si $a < b \leq \alpha_k$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi_k(t)dt &= \big(b^{\gamma_k+1} - a^{\gamma_k+1}\big)(p\gamma_k + 1)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \alpha_k^{\gamma_k+1}(p\gamma_k + 1)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \exp\big(-(\lambda_k+1)^{\frac{1}{2}}\big)(p\lambda_k + 1)^{\frac{1}{p}} \to 0,
\end{aligned}$$

quand $k \to +\infty$. De plus, l'estimation $1 - \exp(-u) \leq u$ donne pour tous c, d tels que $\beta_k \leq c < d$:

$$\begin{aligned}
\int_c^d \varphi_k(t)dt &= \big(d^{\gamma_k+1} - c^{\gamma_k+1}\big)(p\gamma_k + 1)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \big(1 - \beta_k^{\gamma_k+1}\big)(p\gamma_k + 1)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{(p\gamma_k + 1)^{\frac{1}{p}}}{(\gamma_k + 1)^2} \to 0,
\end{aligned}$$

quand $k \to +\infty$. On a aussi :

$$\varphi_k(\alpha_k) = (p\gamma_k + 1)^{\frac{1}{p}}(\gamma_k + 1)\exp\big(-\frac{\gamma_k}{(\gamma_k+1)^{\frac{1}{2}}}\big) \to 0,$$

et

$$(1-\beta_k)\varphi_k(1) \leq \frac{(p\gamma_k+1)^{\frac{1}{p}}(\gamma_k+1)}{(\gamma_k+1)^3} \to 0,$$

quand $k \to +\infty$. On définit alors ε_k comme le maximum entre ces quatre quantités, et la suite $(\varepsilon_k)_k$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
1 = \|\varphi_k\|_{C(p)}^p &= \int_0^{\alpha_k} \big(\Gamma(\varphi_k)(x)\big)^p dx + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{1}{x^p}\Big(\int_0^{\alpha_k} \varphi_k(t)dt + \int_{\alpha_k}^{x} \varphi_k(t)dt\Big)^p dx \\
&+ \int_{\beta_k}^{1} \big(\Gamma(\varphi_k)(x)\big)^p dx \\
&\leq \varepsilon_k^p + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{1}{x^p}\Big(\varepsilon_k + \int_{\alpha_k}^{x} \varphi_k(t)dt\Big)^p dx + \varepsilon_k^p \\
&\sim \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{1}{x^p}\Big(\int_{\alpha_k}^{x} \varphi_k(t)dt\Big)^p dx,
\end{aligned}$$

quand $k \to +\infty$. Maintenant fixons n_0 tel que $\alpha_{n_0} \geq 1-\delta$. Pour tout $m > n \geq n_0$ on a :

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(\varphi_n) - T_\psi(\varphi_m)\|_{C(p)}^p &= \int_0^1 \Gamma(|\psi|.|\varphi_n - \varphi_m|)(x)^p dx \\
&\geq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \Big(\frac{1}{x}\int_{\alpha_n}^{x} |\psi|.|\varphi_n - \varphi_m|\Big)^p dx + \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \Big(\frac{1}{x}\int_{\alpha_m}^{x} |\psi|.|\varphi_n - \varphi_m|\Big)^p dx \\
&\geq |\psi(1)|(1-\varepsilon)\Bigg(\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{1}{x^p}\Big(\int_{\alpha_n}^{x} \varphi_n(t)dt - \varepsilon_m\Big)^p dx \\
&+ \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{1}{x^p}\Big(\int_{\alpha_m}^{x} \varphi_m(t)dt - \varepsilon_n\Big)^p dx\Bigg) \\
&\sim 2|\psi(1)|(1-\varepsilon),
\end{aligned}$$

quand $n, m \to +\infty$ avec $n < m$. D'après le Lemme 1.45, on obtient la borne inférieure voulue pour $\|T_\psi^\Lambda\|_e$. □

Bibliographie

[1] A. Aghajani, M. Mursaleen, K. Raj, *Multiplication operators on Cesàro function spaces*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Serbia, (2016) 1175-1184.

[2] T.A. Abrahamsen, A. Leraand, A. Martiny, O. Nygaard, *Two properties of Müntz spaces,* Available on ArXiv

[3] I. AlAlam, A Müntz space having no complement in L^1, Proc. Am. Math. Soc. Vol. 136, No 1, (2008), p.193–201.

[4] I. AlAlam, Essential norms of weighted composition operators on Müntz spaces, J. Math. Anal. Appl. 358 (2009), p.273–280.

[5] I. AlAlam, *Géométrie des espaces de Müntz et opérateurs de composition à poids,* Université Lille 1 (2008)

[6] I. AlAlam, L. Gaillard, G. Habib, P. Lefèvre, F. Maalouf, *Essential norm of Cesàro operator on L^p and Cesàro spaces,* Submitted for publication (2017)

[7] I. AlAlam, G.Habib, P. Lefèvre and F. Maalouf, *Essential norms of Volterra and Cesàro operators on Müntz Spaces,* Colloquium Math.(to appear).

[8] I. AlAlam and P. Lefèvre, *Essential norms of weighted composition operators on L^1 Müntz spaces,* Serdica Math. J., no.40(3) (2014), p.241-260.

[9] J.M. Almira, Müntz Type Theorems, Surveys in Approximation Theory Volume 3 (2007) pp. 152–194.

[10] S. Astashkin, L. Maligranda *Structure of Cesàro function spaces*, Indag. Mathem., N.S. (2009), 20 (3), 329–379.

[11] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces,* Springer-Verlag, New York, 1976.

[12] A. Blandignères, *Plongements de types Carleson pour certains espaces fonctionnels,* Université Lyon 1 (2013).

[13] P. Borwein and T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Springer (1995).

[14] P. Borwein, T. Erdélyi and J. Zhang, *Müntz systems and Orthogonal Müntz-Legendre polynomials,* Transaction of the Am. Math. Soc., Vol 342, no 2 (1994), p. 523-542.

[15] B. Carl and I. Stephani, *Entropy, compactness, and the approximation numbers,* Cambridge Tracts in math. 98 (1990)

[16] L. Carleson, *Interpolations by Bounded Analytic Functions and the Corona Problem,* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 76, No. 3 (1962), pp. 547-559

[17] F. Chabbabi, *Product commuting maps with the λ-Aluthge transform,* J. Math. Anal. Appl. 449 (2017), no. 1, pp. 589-600.

[18] I. Chalendar, E. Fricain and D. Timotin, *Embeddings theorems for Müntz Spaces,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), no.6 (61), (2011) MR2976312, 2291-2311.

[19] A. Clarkson and P. Erdös, *Approximation by polynomials*, Duke Math. J. **10** (1943), 5-11.

[20] G. Curbera, W. Ricker, *Abstract Cesàro spaces : integral representations,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 441 (2016) p.25-44.

[21] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Univesity press, 1995.

[22] P. Duren and A. Schuster, *Bergman spaces*, Math. surveys and monographs 100 (2004)

[23] T. Erdelyi, *The "full Clarkson-Erdös-Schwartz theorem" on the closure of non-dense Müntz spaces*, Studia mathematica vol. 155, Issue 2 (2003) , p. 145-152

[24] E. Fricain and P. Lefèvre, *L^2-Müntz spaces as model spaces*, (submitted for publication) (2017).

[25] L. Gaillard, P. Lefèvre, *Lacunary Müntz spaces : isomorphisms and Carleson embeddings*, Ann. Inst. Fourier (2017).

[26] L. Gaillard, P. Lefèvre, *Asymptotic isometries for lacunary Müntz spaces and applications*, (submitted for publication) (2017).

[27] G. Godefroy, *Unconditionality in spaces of smooth functions*, Arch. Math. (Basel) 92 (2009), no. 5, p.476-484.

[28] M. v. Golitschek, *A short proof of Müntz Theorem*, J. Approx. Theory 39 (1983) 394–395.

[29] K-G. Grosse-Erdmann, *The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality*, Lecture Notes in Mathematics, vol 1679 (1998).

[30] A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm. (French)*, Bulletin de la SMF no 84 (1956), 319–384.

[31] V. Gurariy and W. Lusky, *Geometry of Müntz spaces and related questions*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[32] V. Gurariy and V.I. Macaev, *Lacunary power sequences in the spaces C and L^p*, Amer. Math. Soc. Translated, Serie 2, Vol.72, (1966), p.9-21.

[33] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge university press, London (1934).

[34] P. Lefèvre, *Müntz spaces and special Bloch type inequalities*, Submitted for publication (2017).

[35] P. Lefèvre, *The Volterra operator is finitely strictly singular from ℓ^1 to ℓ^∞*, J. Approx. Theory 214 (2017), 1-8.

[36] P. Lefèvre, *Generalized essential norm of weighted composition operators on some uniform algebras of analytic functions*, Integral Equations and Operator Theory **63** (2009), 557-569.

[37] D. Li and H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach*, Soc. Math de France (2004)

[38] S.V. Ludkovsky and W. Lusky, *On the geometry of Müntz spaces*, J. Funct. Spaces, (2015) Art. ID 787291, 7 pp.

[39] V. Milman, *Operators of class C_0 and C_0^**, (Russian) Teor. Funkcii Funkcional, Anal. i Priloen. No 10. (1970), 15-26.

[40] Ch. H. Müntz, *Über den Approximationssatz von Weierstrass*, H. A. Schwarz's Festschrift, Berlin (1914) pp. 303-312.

[41] D.J. Newman, *A Müntz space having no complement*, J. of Approx. theory 40 (1984), p.351-354.

[42] W. Noor, *Embeddings of Müntz spaces : composition operators*, Integr. Equ. Oper. Theory 73 (2012), p.589–602.

[43] W. Noor and D. Timotin, *Embeddings of Müntz spaces : the Hilbertian case*, Proc. Amer. Math. Soc., no.6, 141, (2013) MR3034427, p.2009-2023.

[44] V. Operstein, *Full Müntz theorem in $L_p[0,1]$*, Journal of approximation theory 85 (1996), p. 233-235

[45] A. Pietsch and J. Wenzel, *Orthonormal systems and Banach space geometry,* Cambridge University Press, cambridge, (1998).

[46] G. Pisier, Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces, Regional Conference Series in Mathematics, Volume 60 (1986).

[47] D. Robert, *Sur les traces d'operateurs (de Grothendieck à Lidskii),* SMF – Gazette – 141, juillet 2014

[48] W. Rudin, *Real and complex analysis,* McGrall-Hill Book compagny (1987)

[49] L. Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles,* Hermann, paris, (1943).

[50] A. R. Siegel, *On the Müntz-Szász Theorem for* $C[0,1]$, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972)161–166.

[51] O. Szász, *Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen,* Math. Ann. 77 (1916) 482–496.

[52] D. Werner, *A remark about Müntz spaces,*
http ://page.mi.fu-berlin.de/werner/preprints/muentz.pdf.

[53] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts,* Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge, 1991.