Université Lille1
Sciences et Technologies

UFR de Mathématiques

Mémoire d'analyse fonctionnelle

Noyau de Poisson et dilatations unitaires

Master 2 de mathématiques fondamentales

Écrit par Loïc Gaillard

Sous la direction de Catalin Badea

Juin 2014

Table des matières

Introduction Ce mémoire a pour objet d'étudier des propriétés des opérateurs d'un espace de Hilbert. Dans un espace de Hilbert complexe H, on peut définir le noyau de Poisson $K_z(T)$ d'une contraction. On peut en trouver de nombreuses applications que nous explorons dans ce document.

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est une contraction et $z \in \mathbb{D}$, le noyau de Poisson permet, comme dans le cas scalaire, de représenter les polynômes en T avec la formule de Poisson. De plus, sa positivité caractérise les contractions. On s'en sert alors pour prouver l'inégalité de Von-Neumann et définir le calcul fonctionnel de $A(\mathbb{D})$.

Dans la seconde partie, on étudie les dilatations unitaires sur $l^2(H)$ des opérateurs sur H. On verra alors une condition suffisante pour que T admette le shift comme dilatation unitaire. C'est le noyau de Poisson qui permet de trouver le shift en question. Ensuite, on remarquera qu'une inégalité du noyau de Poisson $K_z(T)$ permet de caractériser les opérateurs dans la même classe de Harnack que T.

La troisième partie est dédiée à l'étude les opérateurs de classe C_ρ. Le noyau de Poisson permet de trouver et formuler une caractérisation commode des opérateurs de classe C_ρ. On peut généraliser certains résultats valables pour les contractions aux $\rho-$contractions comme par exemple l'inégalité de Von-Neumann.

Pour finir, on définit le calcul fonctionnel de H^∞ pour les contraction absolument continues. Pour cela, on verra que le noyau de Poisson permet de construire une mesure spectrale μ^T pour une contraction T. Ensuite on pourra étendre le calcul fonctionnel de $A(\mathbb{D})$ à H^∞ en utilisant la mesure spectrale, lorsqu'elle est absolument continue.

1 Noyau de Poisson et contractions

Dans cette partie, on va introduire le noyau de Poisson et ses propriétés principales. Comme avec le noyau de Poisson scalaire, on peut évaluer f en T à l'aide d'une intégrale de Poisson si T est une contraction et $f \in A(\mathbb{D})$. L'inégalité de Von-Neumann s'étend à l'algèbre du disque. En partie 1.4 on comparera ce calcul fonctionnel et celui de Riesz Dunford.

1.1 Noyau de Poisson

Définition. Soit $z \in \mathbb{D}$ et $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur de rayon spectral inférieur ou égal à 1. Le *noyau de Poisson* $K_z(T)$ est défini par

$$K_z(T) = (Id_H - zT^*)^{-1} + (Id_H - \overline{z}T)^{-1} - Id_H$$

Proposition 1. (i) Si $T = \lambda Id_H$ avec $|\lambda| = 1$, $K_z(T) = P_z(\lambda)Id_H$, où P_z est le noyau de Poisson scalaire défini pour $z = re^{i\theta}$ par

$$P_z(\lambda) = \frac{1}{1-\overline{z}\lambda} + \frac{1}{1-z\overline{\lambda}} - 1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{-in\theta}\lambda^n = \frac{1-|z|^2}{|z-\lambda|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-\overline{\lambda}z|^2}$$

(ii) Comme dans le cas scalaire, on peut exprimer le noyau de Poisson à l'aide d'une "série de Fourier" :

$$K_z(T) = Id_H + \sum_{n>0} \overline{z}^n T^n + \sum_{n>0} z^n T^{*n}$$

(iii) Comme dans le cas scalaire, on peut "réduire au même dénominateur" :

$$K_z(T) = (Id_H - zT^*)^{-1}(Id_H - |z|^2T^*T)(Id_H - \overline{z}T)^{-1}$$

Démonstration. Preuve de (i) :

$K_z(\lambda Id_H) = (Id_H - z(\lambda Id_H)^*)^{-1} + (Id_H - \overline{z}\lambda Id_H)^{-1} - Id_H = (\frac{1}{1-z\overline{\lambda}} + \frac{1}{1-\overline{z}\lambda} - 1)Id_H$

Preuve de (ii) : $r(zT^*) \leq |z| < 1$. D'après la formule de Carl-Neumann,

$$(Id_H - zT^*)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(zT^*)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n T^{*n}$$

La série converge dans $\mathcal{B}(H)$. De même pour $(Id_H - \overline{z}T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z}^n T^n$. Finalement on a bien

$$K_z(T) = Id_H + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}^n T^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^{*n}$$

Preuve de (iii) :

$$\begin{aligned} K_z(T) &= (Id_H - zT^*)^{-1}(Id_H + (Id_H - zT^*)(Id_H - \overline{z}T)^{-1} - (Id_H - zT^*)) \\ &= (Id_H - zT^*)^{-1}(Id_H - \overline{z}T + Id_H - zT^* - (Id_H - zT^*)(Id_H - \overline{z}T))(Id_H - \overline{z}T)^{-1} \\ &= (Id_H - zT^*)^{-1}(Id_H - |z|^2T^*T)(Id_H - \overline{z}T)^{-1} \end{aligned}$$

□

Notation. On notera parfois $T^{(n)} = T^n$ si $n \geq 0$, et $T^{(n)} = T^{*n}$ sinon. Alors on peut écrire :

$$K_z(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\overline{z}T)^{(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{-in\theta}T^{(n)}$$

Définition. Dans un espace de Hilbert, tout opérateur T s'écrit de façon unique $T = U + iV$, où U, V sont auto-adjoints. On définit

$$Re(T) = U = \frac{1}{2}(T + T^*)$$

Remarque. Il existe une relation d'ordre sur l'ensemble des opérateurs auto-adjoints : soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoints.

$$S \leq T \Leftrightarrow \forall x \in H, (Sx|x) \leq (Tx|x)$$

On a toujours $Re(T) \leq ||T|| Id_H$.

Le noyau de Poisson d'un opérateur est toujours auto-adjoint. $K_z(T) = 2Re((Id_H - \overline{z}T)^{-1} - Id_H)$

Proposition 2. T est une contraction si et seulement si $Id_H - T^*T$ est positif.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $x \in H$.

$$\begin{aligned}((Id_H - T^*T)x|x) &= (x|x) - (Tx|Tx) \\ &= ||x||^2 - ||Tx||^2\end{aligned}$$

Donc $((Id_H - T^*T)x|x) \geq 0 \Leftrightarrow ||Tx|| \leq ||x||$. Ainsi

$$Id_H - T^*T \geq 0 \Leftrightarrow ||T|| \leq 1$$

□

Proposition 3. T est une contraction si et seulement si $\forall z \in \mathbb{D}, K_z(T) \geq 0$.

Démonstration.
$$\begin{aligned}K_z(T) &= (Id_H - zT^*)^{-1}(Id_H - |z|^2T^*T)(Id_H - \overline{z}T)^{-1} \\ &= A^{-1}(Id_H - |z|^2T^*T)A^{*-1} \qquad \text{avec } A = (Id_H - zT^*).\end{aligned}$$

Ainsi $K_z(T)$ est positif si et seulement si $Id_H - |z|^2T^*T$ est positif. Lorsque T est une contraction et $|z| \leq 1$, $Id_H - |z|^2T^*T \geq Id_H - T^*T \geq 0$. Donc pour tout $z \in \mathbb{D}, K_z(T) \geq 0$

Réciproque : on suppose maintenant pour tout $z \in \mathbb{D}, Id_H - |z|^2T^*T \geq 0$. Soit $h \in H$ alors $((Id_H - |z|^2T^*T)h|h) \geq 0$ pour tout $z, |z| < 1$. L'inégalité se prolonge à $|z| = 1$ par continuité du produit scalaire. Donc $Id_H - T^*T$ est positif. Donc T est une contraction. □

1.2 Formule de Poisson pour les contractions

Le noyau de Poisson scalaire permet d'évaluer les fonctions harmoniques.

$$\forall f \in Har(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}), \forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})P_z(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta$$

Par ailleurs, $\lambda \mapsto P_z(\lambda)$ se prolonge en une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ avec la série de Fourier :

$$\forall \lambda \in \mathbb{D}, P_z(\lambda) = 1 + \sum_{n>0} (\overline{z}\lambda)^n + (z\overline{\lambda})^n = P_{z\overline{\lambda}}(1)$$

On remarque alors si $r < 1, z \in \mathbb{D}$, on a $P_{rz}(e^{\mathrm{i}\theta}) = P_{re^{\mathrm{i}\theta}}(z)$. Ainsi, la formule précédente s'écrit aussi :

$$\forall f \in Har(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}), \forall z \in \overline{\mathbb{D}}, \forall r < 1, f(rz) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})P_{re^{\mathrm{i}\theta}}(z)d\theta$$

La formule est vraie en particulier pour les polynômes, d'où l'énoncé suivant :

Proposition 4. Soit p un polynôme de $\mathbb{C}[z]$ et $T \in \mathcal{B}(H)$ avec $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$.

$$\forall r \in [0, 1[, p(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta})K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)d\theta$$

Démonstration. Soit $r \in [0,1[, \theta \in [0,2\pi]$; $K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} r^n e^{\mathrm{i}n\theta} T^{*n} + \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} r^n e^{-\mathrm{i}n\theta} T^n - Id_H$ et les séries convergent normalement dans $\mathcal{B}(H)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k$.

On note $T^{(n)} = T^n$ si $n \geq 0$, $T^{(n)} = T^{*n}$ si $n \leq 0$. Ainsi $K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{-\mathrm{i}n\theta} T^{(n)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta}) K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T) d\theta &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_k r^{|n|} e^{\mathrm{i}(k-n)\theta} T^{(n)} d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^k T^{(k)} d\theta \qquad \text{car } n \neq k \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}\theta(k-n)} d\theta = 0 \\
&= p(rT)
\end{aligned}$$

□

Remarque. Si $||T|| < 1$, le noyau de Poisson $K_z(T)$ est défini pour $z \in \mathbb{T}$. En effet, la formule $K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T) = (Id_H - e^{-\mathrm{i}\theta}T)^{-1} + (Id_H - e^{\mathrm{i}\theta}T^*) - Id_H$ fait sens car $r(T) \leq ||T|| < 1$.

Proposition 5. *formules de Poisson :* soit $T \in \mathcal{B}(H)$, $||T|| < 1$. Soit $p \in \mathbb{C}[z]$.

$$p(T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta}) K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T) d\theta \quad , \quad p(T^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{-\mathrm{i}\theta}) K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T) d\theta$$

Démonstration. On a déjà vu la formule

$$p(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta}) K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T) d\theta$$

pour tout T de rayon spectral inférieur ou égal à 1, $r < 1$. $||p(rT) - p(T)|| \leq \sum\limits_{k=0}^{N} |a_k|.||T||^k(1 - r^k) \leq (1 - r^N)\sum |a_k|$. Donc $\lim\limits_{r\to 1} p(rT) = p(T)$. (limite dans $\mathcal{B}(H)$)

D'autre part, $\forall z \in \overline{\mathbb{D}}, ||(Id_H - zT)^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1 - ||T||}$. On obtient alors

$||(Id_H - re^{\mathrm{i}\theta}T^*)^{-1} - (Id_H - e^{\mathrm{i}\theta}T^*)^{-1}|| \leq \dfrac{(1-r)}{(1-||T||)^2}$,

ainsi que $||(Id_H - re^{-\mathrm{i}\theta}T)^{-1} - (Id_H - e^{-\mathrm{i}\theta}T)^{-1}|| \leq \dfrac{(1-r)}{(1-||T||)^2}$

Ainsi on a

$$||K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T) - K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)|| \leq 2\frac{1-r}{(1-||T||)^2}$$

$K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)$ converge uniformément (en θ) vers $K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)$ donne alors

$\lim\limits_{r\to 1} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta}) K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T) d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta}) K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T) d\theta$, puis

$$p(T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta}) K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T) d\theta$$

Pour $p(T^*)$, on remarque tout d'abord que $K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T^*) = K_{e^{-\mathrm{i}\theta}}(T)$, et on obtient la formule en faisant le changement de variable $\theta \mapsto -\theta$ dans l'intégrale. □

Corollaire. Soit T une contraction stricte, $n \in \mathbb{Z}$.

$$T^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)d\theta$$

Proposition 6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, $r(T) < 1$. Alors on a encore

$$p(T) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta})K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)d\theta$$

Démonstration. En reprenant la preuve des formules de Poisson pour les contractions strictes, le seul argument qui ne marche plus est celui de la majoration uniforme en $z \in \overline{\mathbb{D}}$ des $K_z(T)$;

Soit T avec $r(T) < 1$; soit $s > 1$ tel que $r(sT) < 1$. Par exemple, $s = \frac{1+\frac{1}{r(T)}}{2}$ convient si $r(T) \neq 0$, $s > 1$ quelconque convient sinon. Comme $r(sT) < 1$, l'opérateur sT est à puissances bornées par M. Ainsi $||(sT)^n|| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||T^n|| \leq \frac{M}{s^n}$$

Soit $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$; $||(Id_H - zT)^{-1}|| = ||\sum_{n\in\mathbb{N}}(zT)^n|| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} ||T||^n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{M}{s^n} \leq \frac{M}{1-\frac{1}{s}}$

Finalement on obtient

$$\forall z \in \overline{\mathbb{D}}, ||K_z(T)|| \leq \frac{2sM}{s-1} - 1$$

Notons $D = \dfrac{2sM}{s-1} - 1$; on en déduit

$$||K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T) - K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)|| \leq 2(1-r)||T||D^2$$

puis la convergence uniforme (en θ) des $K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)$ vers $K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)$ et on obtient bien

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta})K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta})K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)d\theta$$

□

1.3 Inégalité de Von Neumann

Théorème 1. *Inégalité de Von Neumann :*

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ une contraction ($||T|| \leq 1$) et $p \in \mathbb{C}[z]$. Alors

$$||p(T)|| \leq \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |p(z)|$$

Démonstration. Soit p un polynôme $r \in [0, 1[$, $x, y \in H$.

$$(p(rT)x|y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{\mathrm{i}\theta})(K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)x|y)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(re^{\mathrm{i}\theta})(\sqrt{K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)}x|\sqrt{K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)}y)d\theta$$

En effet $K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)$ est positif pour tout θ car T est une contraction. Il admet donc une unique racine carrée positive.

Notation. On note $x'_{r,\theta} = \sqrt{K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)}x$, et $y'_{r,\theta} = \sqrt{K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)}y$;

$$
\begin{aligned}
|(p(rT)x|y)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{\mathrm{i}\theta})|(x'_{r,\theta}|y'_{r,\theta})|d\theta \\
&\leq \sup_{|z|=1}|p(z)|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||x'_{r,\theta}||.||y'_{r,\theta}||d\theta \qquad \text{d'après Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \sup_{|z|=1}|p(z)|\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||x'_{r,\theta}||^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||y'_{r,\theta}||^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{d'après Cauchy-Schwarz}
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||x'_{r,\theta}||^2 d\theta = \int_0^{2\pi}(x_{r,\theta}|x_{r,\theta})d\theta = ((\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)d\theta)x|x) = (x|x)$ car $Id_H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{re^{\mathrm{i}\theta}}d\theta$.

Finalement on a $|(p(rT)x|y)| \leq \sup_{|z|\leq 1}|p(z)|.||x||.||y||$, ainsi en faisant tendre r vers 1 on obtient

$$||p(T)|| \leq \sup_{|z|\leq 1}|p(z)|$$

□

L'inégalité de Von Neumann caractérise les espaces de Hilbert : si X est un espace de Banach dans lequel toute contraction $T \in \mathcal{B}(X)$ vérifie l'inégalité de Von Neumann, alors la norme sur X est issue d'un produit scalaire.

Définition. Soit $A(\mathbb{D}) = Hol(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, appelée *l'algèbre du disque*. On la munit de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|f(z)|$$

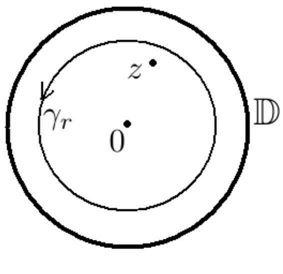
L'algèbre du disque $(A(\mathbb{D}), ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.

Démonstration. On va montrer la complétude, le reste est plus élémentaire.

$A(\mathbb{D}) = \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D}) \subset \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$

De plus la norme sur $A(\mathbb{D})$ est la restriction de la norme sur $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Enfin, $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ est complet muni de la norme $||.||_\infty$. Il n'y a plus qu'à prouver que $A(\mathbb{D})$ est une partie fermée de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$.

Soit f_n une suite de fonctions de $A(\mathbb{D})$ qui converge uniformément vers f sur $\overline{\mathbb{D}}$. En particulier f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Soit $z \in \mathbb{D}$ et $r \in]|z|, 1[$ et γ_r le cercle de centre 0 de rayon r. Soit $n \in \mathbb{N}$.



$$
\begin{aligned}
f(z) &= \lim_{n\to\infty} f_n(z) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f_n(w)dw}{w-z} \quad \text{à partir de } n \text{ assez grand car pour } n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ holomorphe sur } \mathbb{D} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(w)dw}{w-z} \quad \text{car } f_n \text{ converge uniformément sur } \gamma_r \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)dw}{w-z}
\end{aligned}
$$

La formule de Cauchy pour $f(z)$ est vraie pour tout γ_r dès que $r > |z|$. Donc f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et donc $f \in A(\mathbb{D})$. □

Proposition 7. Soit $f \in A(\mathbb{D})$. Alors il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}$ vers f.

Démonstration. Soit $S_N f(z) := \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

En voyant f comme sa restriction à $\mathbb{T}$, on remarque que $S_N f(z)$ est le $N-$ième terme de la suite des polynômes de Fejer de f. D'après le théorème de Fejer f est continue donc $S_N f$ converge uniformément sur $\mathbb{T}$ vers f.

Soit $f \in A(\mathbb{D})$; alors $\sup\limits_{z\in\mathbb{T}} |f(z)| = ||f||_\infty$. C'est une conséquence du principe du maximum : si le suprémum est atteint en un point $z_0 \in \mathbb{D}$, alors f est constante ; dans tous les cas le suprémum est atteint au bord du disque.

$||S_N f - f||_\infty = \sup\limits_{z\in\mathbb{T}} |S_N f(z) - f(z)| \leq ||S_N f - f||_{\mathcal{C}(\mathbb{T})}$. D'après le théorème de Fejer on a donc $S_N f$ converge vers f dans $A(\mathbb{D})$. □

Remarque. Rien ne garantit que la somme partielle de la série entière $\sum a_k z^k$ de f convient. C'est même faux en général.

1.4 Calculs fonctionnels

Proposition 8. *Calcul fonctionnel de l'algèbre du disque :*

Soit T une contraction. Alors :

(i) Le calcul fonctionnel polynômial $\Theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[z] & \to & \mathcal{B}(H) \\ p & \mapsto & p(T) \end{array}$ se prolonge en un morphisme d'algèbres de Banach $\Theta' : A(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}(H)$

Notation. - Pour $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$, on note $p(T) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n T^n$.

- On note $f(T) = \Theta'(f)$ pour $f \in A(\mathbb{D})$

(ii) L'inégalité de Von-Neumann se prolonge à $A(\mathbb{D})$, donc $||\Theta'|| = 1$ et

$$\forall f \in A(\mathbb{D}), \forall T \in \mathcal{B}(H), ||T|| \leq 1, ||f(T)||_{\mathcal{B}(H)} \leq ||f||_\infty$$

(iii) On a une relation spectrale :

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

Démonstration. (i) Soit $f \in A(\mathbb{D})$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge vers f uniformément. $||(p_k - p_n)(T)||_{\mathcal{B}(H)} \leq ||p_k - p_n||_\infty$ d'après Von-Neumann. Comme (p_n) converge dans $A(\mathbb{D})$ c'est une suite de Cauchy. Ainsi $(p_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et admet une limite $L \in \mathcal{B}(H)$. Si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite de polynômes convergeant vers f,

$||p_n(T) - q_n(T)||_{\mathcal{B}(H)} \leq ||p_n - q_n||_\infty \leq ||p_n - f||_\infty + ||q_n - f||_\infty$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} p_n(T) = \lim_{n\to\infty} q_n(T) := f(T) = \Theta'(f)$$

On montre que c'est un morphisme d'algèbres avec Von-Neumann.

(ii) Soit $f \in A(\mathbb{D})$ et p_n une suite de polynômes qui converge uniformément vers f.

$||f(T)|| = ||\lim\limits_{n\to\infty} p_n(T)|| = \lim\limits_{n\to\infty} ||p_n(T)|| \leq \lim\limits_{n\to\infty} ||p_n||_\infty = ||f||_\infty$, d'après la continuité de la norme et l'inégalité de Von-Neumann polynômiale. Ainsi,

$$\forall f \in A(\mathbb{D}), ||f(T)|| \leq ||f||_\infty$$

Il est évident que Θ' est linéaire. On déduit de l'inégalité de Von-Neumann que Θ' est aussi de norme 1. Montrons que c'est un morphisme d'algèbres : soient $f, g \in A(\mathbb{D})$, f_n, g_n deux suites de polynômes convergeant respectivement vers f, g.

$\Theta'(fg) = \Theta' \lim_{n\to\infty f_n g_n} = \lim_{n\to\infty} \Theta'(f_n g_n) = \lim_{n\to\infty} \Theta'(f_n)\Theta'(g_n) = \Theta'(f)\Theta'(g)$

(iii) Si $\lambda \in \sigma(T)$, $p_n(\lambda) \in \sigma(p_n(T))$ pour tout n. La suite d'opérateurs $T_n = (p_n(\lambda)Id_H - p_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{B}(H)$ vers $f(\lambda)Id_H - f(T)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, T_n n'est pas inversible ; de plus, l'ensemble des non-inversibles est fermé dans $\mathcal{B}(H)$. Donc $f(\lambda)Id_H - f(T)$ n'est pas inversible,

$$f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$$

Réciproquement, si $\lambda \notin \sigma(T)$, on définit $g(z) = \frac{1}{f(\lambda)-f(z)}$; $g \in A(\mathbb{D})$, de plus $\forall z \in \overline{\mathbb{D}}, (f(z)-\lambda)g(z) = 1$. Donc $g(T)(f(T) - f(\lambda)Id_H) = (f(T) - f(\lambda)Id_H)g(T) = Id_H$. On a donc

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

□

On a défini un calcul fonctionnel de l'algèbre $A(\mathbb{D})$ sur l'ensemble des contractions. De plus on a déjà un calcul fonctionnel sur l'ensemble des opérateurs T de rayon spectral $r(T) < 1$. On les compare sur les contractions strictes :

Proposition 9. Soit $||T|| < 1$ et $f \in A(\mathbb{D})$. $f \in Hol(\mathbb{D})$ et $\sigma(T) \subset \overline{D(0, ||T||)}$, alors le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford définit le même opérateur $f(T)$ que le calcul fonctionnel de $A(\mathbb{D})$.

Démonstration. Soit $f \in A(\mathbb{D})$; le calcul fonctionnel de Riesz Dunford définit :

$$f_1(T) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma f(w)R_w(T)dw$$

avec pour γ le cercle de rayon $R = \frac{1+||T||}{2}$ par exemple.

Pour définir $f(T)$ par le calcul fonctionnel de l'algèbre du disque, on remarque d'abord : $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,R)}$ et $||a_n T^n|| \leq |a_n|R^n$ donc $\sum a_n T^n$ converge normalement dans $\mathcal{B}(H)$. On définit donc $f_2(T) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n T^n$. Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma w^n R_w(T)dw$.

$$f_2(T) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n T^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \sum_{n=0}^{N} a_n z^n R_z(T)dz = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n R_z(T)dz = f_1(T)$$

□

Remarque. Soit $f \in A(\mathbb{D})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de sa série entière. Alors $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$. C'est un cas particulier du lemme de Riemann-Lebesgue car $A(\mathbb{D}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

Remarque. On pourrait être tentés d'introduire un calcul fonctionnel harmonique sur les opérateurs T tels que $r(T) < 1$ avec la formule de Poisson.

Cependant $Har(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ n'est pas une algèbre, donc cela définirait juste un prolongement linéaire (ce qui est facile à faire avec Hahn-Banach). De plus on ne pourrait pas avoir de formule spectrale. Par exemple,

Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $f = Re \in Har(\mathbb{C})$; on définit $f(T)$ avec le noyau de Poisson sur $\gamma = \mathcal{C}(0,1)$:

$$f(T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)d\theta$$

On obtient $f(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$; dans notre cas, $Re(T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

On a $\sigma(T) = \{0\}$ et $\sigma(Re(T)) = \{\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}\}$. On ne peut donc pas espérer une inclusion spectrale.

2 Dilatations unitaires

Dans cette partie on introduit l'espace $l^2(H)$ et le shift bilatéral sur $l^2(H)$ afin de prouver une version affinée du théorème de dilatations de Nagy. Toute contraction stricte est une compression du shift bilatéral. On parlera ensuite brièvement de la partie de Harnack d'une contraction. Cela permet de réduire l'énoncé du théorème précédent à : toute contraction stricte est Harnack équivalente à l'opérateur nul.

2.1 L'espace $l^2(H)$

Soit $l^2(\mathbb{C})$ l'espace des suites indexées sur $\mathbb{Z}$ de carré sommable, à coefficients dans $\mathbb{C}$. On sait que l'application

$$(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\mathrm{i}n\theta} c_n$$

réalise un isomorphisme isométrique de $l^2(\mathbb{C})$ vers $L^2(\mathbb{T},\mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes du tore de carré intégrable. On note $f(\theta)$ au lieu de $f(e^{\mathrm{i}\theta})$ grâce à l'identification immédiate de $[0,2\pi]$ et $\mathbb{T}$. La réciproque est définie par la transformation de Fourier :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}) & \to & l^2(\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)e^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta, n\in\mathbb{Z} \end{array}$$

On va ici étudier la correspondance de $l^2(H)$ vers $L^2(\mathbb{T},H)$ où H est un espace de Hilbert. Comme ces deux espaces sont isomorphes, on les appellera $l^2(H)$.

Définition. Soient H un espace de Hilbert, $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $h' = (h'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites de $l^2(H)$.

$$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(H) \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} ||h_n||_H^2 < \infty$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant :

$$(h|h') := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (h_n|h'_n)_H$$

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une base de H et $f_{i,k}(n) := f_i\delta_k^n$, alors $(f_{i,k})_{\substack{i\in I\\k\in\mathbb{Z}}}$ est une base de Hilbert de $l^2(H)$.

Définition. Soient H un espace de Hilbert, φ et φ' deux fonctions de $L^2(\mathbb{T},H)$. De même,

$$\varphi \in L^2(\mathbb{T},H) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ||\varphi(\theta)||^2 d\theta < \infty$$

La formule

$$(\varphi|\varphi') := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\varphi(\theta)|\varphi'(\theta))_H d\theta$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{T},H)$ qui le munit d'une structure d'espace de Hilbert. Si f_i est une base de H et $f_{i,k}(\theta) = e^{\mathrm{i}k\theta}f_i$, la famille $(g_{i,k})_{\substack{i\in I\\k\in\mathbb{Z}}}$ définit une base de Hilbert de $L^2(\mathbb{T},H)$.

Théorème 2. L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} l^2(H) & \to & L^2(\mathbb{T},H) \\ (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \varphi(\theta) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{\mathrm{i}n\theta} \end{array}$

est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. On va montrer que Φ permet d'identifier les bases de Hilbert de $l^2(H)$ et $L^2(\mathbb{T}, H)$. Soit $i \in I, k \in \mathbb{Z}, \theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}\Phi(f_{i,k})(\theta) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{i,k}(n)e^{in\theta} \\ &= e^{ik\theta} f_i \\ &= g_{i,k}(\theta)\end{aligned}$$

Ainsi $\Phi(f_{i,k}) = g_{i,k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $i \in I$. Comme Φ envoie une base de $l^2(H)$ sur une base de $L^2(\mathbb{T}, H)$, Φ est un isomorphisme isométrique. □

Remarque. Φ^{-1} est définie par la transformation de Fourier : soit $f \in L^2(\mathbb{T}, H)$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\Phi^{-1}(f)_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta} d\theta \in H$$

Désormais on mentionnera l'espace $l^2(H)$ en tant qu'espace de suites ou de fonctions du tore $\mathbb{T}$. Il est parfois plus commode de choisir une représentation plutôt que l'autre.

Remarque. Soit $(.|.)_N$ un nouveau produit scalaire sur $l^2(H)$, équivalent à $(.|.)$. Alors il existe D un opérateur positif $D \in \mathcal{B}(l^2(H))$, inversible, avec

$$\forall h, h' \in l^2(H), (h|h')_N = (Dh|h')$$

Notation. Pour la propriété suivante, on note $H' = l^2(H)$ muni du produit scalaire $(.|.)_N = (D.|.)$, et on note $l^2(H)$ l'espace muni du produit scalaire qu'on a défini précédemment, noté $(.|.)$.

Proposition 10. Soit $\Psi : \begin{array}{ccc} H' & \to & l^2(H) \\ h & \mapsto & D^{\frac{1}{2}}h \end{array}$ est une isométrie surjective.

Démonstration. La surjectivité est évidente. Soient $h, h' \in H'$.

$(\Psi h|\Psi h')_{l^2(H)} = (D^{\frac{1}{2}}h|D^{\frac{1}{2}}h')_{l^2(H)} = (Dh|h')_{l^2(H)} = (h|h')_N$. Donc Ψ est unitaire. □

Remarque. L'application $\Psi^{-1} : h \mapsto D^{-\frac{1}{2}}h$ envoie une base de Hilbert de $L^2(H)$ sur une base de H'.

Remarque. $l^2(H)$ peut être vu comme la somme orthogonale :

$$l^2(H) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_k$$

où pour tout $k \in \mathbb{Z}, H_k \simeq H$.

Tout $h \in H$ admet une écriture $h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n$, où $h_n \in H_n$. De plus $||h||^2_{l^2(H)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} ||h_n||^2_{H_n}$.

2.2 Shift bilatéral

Définition. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $S \in \mathcal{B}(H)$. On dit que S est un *shift bilatéral* s'il existe une suite de sous espaces fermés orthogonaux entre eux $H_n \subset \mathcal{H}, n \in \mathbb{Z}$, tels que :

(i) $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n = \mathcal{H}$

(ii) $S(H_n) \subset H_{n+1}$

(iii) $S|_{H_n} : H_k \to H_{n+1}$ est une isométrie surjective.

Exemple. Soit $H = l^2(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes de carré sommable indexées sur $\mathbb{Z}$. Soit $H_k = Span(e_k) = \mathbb{C}e_k$, où $e_k(n) = \delta_n^k$ est la suite nulle pour tout $n \neq k$, dont le $k-$ième terme vaut 1.

On remarque $H = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_k$ et $H_k \simeq \mathbb{C}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Soit $S((u_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = (u_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$. Alors S est un shift bilatéral : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $S(H_k) = H_{k+1}$ et S est isométrique sur H, à fortiori sur H_k.

Proposition 11. Si S est un shift bilatéral, S est unitaire.

Démonstration. Soit $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$;

$$\begin{aligned} ||Sx||^2_{\mathcal{H}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} (Sx_n|Sx_m)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (Sx_n|Sx_n)_{H_{n+1}} \text{ car les } H_n \text{ sont orthogonaux entre eux} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (x_n|x_n)_{H_n} \text{ car } S|_{H_n} \text{ est une isométrie} \\ &= ||x||^2\,; \end{aligned}$$

Ainsi S est une isométrie. Pour tout n, $H_n = S(H_{n-1}) \subset Im(S)$. Donc $\mathcal{H} \subset Im(S)$, S est surjective. □

Lemme. Si S est un shift sur $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} H_n$, il existe un espace de Hilbert H et une suite d'isométries surjectives $\varphi_n : H_n \to H$.

Démonstration. On prend $H = H_0$ et $\varphi_n = S^{-n}|_{H_n} : H_n \to H_0$. □

Proposition 12. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, S un shift sur $\mathcal{H}$ avec la décomposition $\mathcal{H} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} H_n$. Soit H isomorphe à l'un des H_n. Alors $\mathcal{H} = l^2(H)$.

Démonstration. Il s'agit de trouver une isométrie surjective de $\mathcal{H}$ vers $l^2(H)$; soit $\varphi_n : H_n \to H$ une suite d'isométries surjectives. Tout $x \in \mathcal{H}$ s'écrit $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$, $x_n \in H_n$.

Soit $V : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & l^2(H) \\ \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n & \mapsto & (\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ et soit $x \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} ||Vx||^2_{l^2(H)} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\varphi_n(x_n)||^2_H \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} ||x_n||^2_{H_n} \text{ car } \varphi_n \text{ est isométrique pour tout } n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (x_n|x_n)^2_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} (x_n|x_m)^2_{\mathcal{H}} \text{ car } H_n \perp H_m \text{ si } n \neq m \\ &= (x|x)_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}$ est isométriquement équivalent à $l^2(H)$. □

Proposition 13. Soient S_1, S_2 deux shift bilatéraux sur $\mathcal{H}$. Par définition, $\mathcal{H} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^1_n = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^2_n$, $S_i(H^i_n) = H^i_{n+1}$ Soit K_1 un espace de Hilbert isomorphe à H^1_n et $K_2 \simeq H^2_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si K_1 et K_2 sont isomorphes, alors S_1 et S_2 sont unitairement équivalents.

Démonstration. Comme K_1 et K_2 sont isomorphes entre eux et isomorphes à tous les $(H^i_n)_{i=1,2,n\in\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on considère $\varphi_n : H^1_n \to H^2_n$ une isométrie surjective. $U : K_1 \to K_2$ une isométrie surjective. Soit $\mathcal{U} : l^2(K_1) \to l^2(K_2)$ l'opérateur de $l^2(H)$ défini par $\mathcal{U}(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (Uh_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Comme U est une isométrie surjective, $\mathcal{U}$ aussi. Soient T_1 (resp. T_2) le shift bilatéral canonique de $l^2(K_1)$ (resp. $l^2(K_2)$)

$$T_1 = \mathcal{U}^{-1} T_2\, \mathcal{U}$$

À un changement de base de Hilbert près sur les espaces H^i_n, on a $T_1 \overset{U}{\sim} S_1$ et $T_2 \overset{U}{\sim} S_2$ □

Corollaire. Les shift bilatéraux de $l^2(H)$ sont unitairement équivalents entre eux.

Proposition 14. Soit S un shift bilatéral de $l^2(H)$. On peut le voir comme un opérateur sur $L^2(\mathbb{T}, H)$ d'après ce qu'on a vu en 2.1.

Alors S est l'application : $h(\theta) \mapsto e^{\mathrm{i}\theta} h(\theta)$

Démonstration. Soit $\Phi : l^2(H) \to L^2(\mathbb{T}, H)$ l'isométrie surjective définie en 2.1. Soit $S' = \Phi S \Phi^{-1} : L^2(\mathbb{T}, H) \to L^2(\mathbb{T}, H)$. On doit montrer que pour $h \in L^2(\mathbb{T}, H)$, et pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$S'h(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta} h(\theta)$$

Soit $h \in L^2(\mathbb{T}, H)$; soit $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \Phi^{-1}(h)$, on a ainsi $h(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\mathrm{i}n\theta} h_n$; soit T l'opérateur de $L^2(\mathbb{T}, H)$ défini par $h(\theta) \mapsto e^{\mathrm{i}\theta} h(\theta)$; soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

$\Phi S((h_n)_{n\in\mathbb{Z}})(\theta) = \Phi((h_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}})(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\mathrm{i}n\theta} h_{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{\mathrm{i}(n+1)\theta} = e^{\mathrm{i}\theta} h(\theta) = Th(\theta)$

Ainsi, $T = \Phi S \Phi^{-1}$ donc T est bien la représentation de S dans $L^2(\mathbb{T}, H)$. □

2.3 Théorème de Nagy

Définition. Soit H un espace de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(H)$. Une *dilatation de* T est un opérateur $U \in \mathcal{B}(H')$ où H est un sous espace fermé de H', qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, T^n = P_H U^n|_H$$

en notant P_H la projection orthogonale sur H. T est alors une *compression* de U.

Remarque. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$; $U \in \mathcal{B}(H')$ est une dilatation de T dans H' si et seulement si

$$\forall h, h' \in H, \forall n \in \mathbb{N}, (U^n h|h')_{H'} = (T^n h|h')$$

Il est clair que la compression d'un unitaire est une contraction. Le résultat suivant donne la réciproque.

Théorème 3. *de dilatation de Nagy*
T est une contraction si et seulement si il existe $H' \supset H$ espace de Hilbert tel que H est fermé dans H', et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{B}(H')$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, T^n = P_H U^n|_H$$

où P_H est la projection orthogonale sur H

On verra une preuve de ce résultat en section "opérateurs C_ρ". On prouve alors le théorème précédent en prenant le cas $\rho = 1$.

Proposition 15. Si $Ker(T - Id_H)$ n'est pas réduit à zéro (si T a des points fixes), U n'est pas faiblement stable. Plus généralement, si $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ et U une dilatation de T, alors U n'est pas faiblement stable.

Démonstration. Soit $\lambda \in \sigma_p(T), |\lambda| = 1$. Soit $x \in Ker(T - \lambda Id_H) \setminus \{0\}$, vu comme un vecteur de H'. Soit $n \in \mathbb{N}$. $|(U^n x|x)| = |(T^n x|x)| = |\lambda|^n ||x||^2 = ||x||^2$.

Donc $(U^n x|x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$ et U n'est donc pas faiblement stable. □

Remarque. Le shift $S \in \mathcal{B}(l^2(H))$ est faiblement stable. On a donc prouvé en particulier que si S est une dilatation unitaire de T, alors T n'a pas de spectre ponctuel unimodulaire.

On peut même être plus précis :

Proposition 16. Si U est une dilatation unitaire faiblement stable de T, alors T est faiblement stable.

Démonstration. Par contra-posée, soit $x, y \in H$ tels que $(T^n x|y)_H$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$. Alors $(U^n x|y)_{H'}$ ne tend pas vers 0 non plus, et U n'est pas faiblement stable. □

Quand T est une contraction stricte, T est en particulier faiblement stable. Dans la partie suivante on prouve qu'alors T admet une dilatation unitaire U qui est unitairement équivalente au shift.

2.4 Strictes contractions et leurs dilatations unitaires

L'objet de cette partie est de prouver le résultat suivant :

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ avec $||T|| < 1$. Alors T admet une dilatation unitaire V sur $l^2(H)$. De plus, V est unitairement équivalent à l'opérateur de décalage S.

Lemme. Soit $||T|| \leq 1$ (resp. $||T|| < 1$), $z \in \mathbb{D}$ (resp. $\overline{\mathbb{D}}$).

$$K_z(T) = Re((Id_H + \overline{z}T)(Id_H - \overline{z}T)^{-1})$$

Démonstration. $(Id_H + \overline{z}T)(Id_H - \overline{z}T)^{-1} = (Id_H + \overline{z}T) \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (\overline{z}T)^n = Id_H + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\overline{z}T)^n$

$Re(Id_H) = Id_H$; $Re(2(\overline{z}T)^n) = (\overline{z}T)^n + (zT^{*n})$. Ainsi $Re((Id_H + \overline{z}T)(Id_H - \overline{z}T)^{-1}) = K_z(T)$ □

Lemme. Soit T une contraction stricte. Soit $r = ||T|| < 1$, soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\forall h \in H, c_1||h||^2 \leq (K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)h|h) \leq c_2||h||^2$$

avec $c_1 = \dfrac{1-r}{1+r}, c_2 = \dfrac{1}{(1-r)^2}$.

Démonstration. Soit $h_\theta = (Id_H - e^{-\mathrm{i}\theta}T)^{-1}h$;

$(K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)h|h) = Re((Id_H + e^{\mathrm{i}\theta}T)h_\theta|(Id_H - e^{\mathrm{i}\theta}T)h_\theta) = ||h_\theta||^2 - ||Th_\theta||^2$

D'autre part, $||h|| = ||(Id_H - e^{\mathrm{i}\theta}T)h_\theta||$ permet d'obtenir

$$0 < (1-r)||h_\theta|| \leq ||h|| \leq (1+r)||h_\theta||$$

Donc $(K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)h|h) = ||h_\theta||^2 - ||Th_\theta||^2 \geq (1-r^2)||h_\theta||^2 \geq \dfrac{1-r^2}{(1-r)^2}||h||^2 = c_1||h||^2$;

$(K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)h|h) \leq ||h_\theta||^2 \leq \dfrac{1}{(1-r)^2}||h||^2$ □

On voit ici $l^2(H)$ comme un ensemble de fonctions de $\mathbb{T}$ vers H.

Corollaire. Soit $(.|.)_N$ l'application sesquilinéaire sur $L^2(\mathbb{T}, H)$ définie par

$$(\varphi|\varphi')_N := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)\varphi(\theta)|\varphi'(\theta))_H d\theta$$

Alors $(.|.)_N$ est un produit scalaire équivalent à $(.|.)$. De plus il existe $D : l^2(H) \to l^2(H)$ un opérateur positif tel que

$$\forall \varphi, \varphi' \in l^2(H), (\varphi|\varphi')_N = (D\varphi|\varphi')$$

Démonstration. Soit $\varphi \in l^2(H)$. D'après le lemme précédent, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ on a l'inégalité

$$c_1||\varphi(\theta)||^2 \leq (K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)\varphi(\theta)|\varphi(\theta)) \leq c_2||\varphi(\theta)||^2$$

On intègre l'expression sur $[0, 2\pi]$, on normalise et on obtient

$$c_1(\varphi|\varphi) \leq (\varphi|\varphi)_N \leq c_2(\varphi|\varphi)$$

Les normes issues de $(.|.)$ et $(.|.)_N$ sont ainsi équivalentes. On en déduit que les produits scalaires définissent la même topologie. De plus d'après le théorème de Riesz pour les formes sesquilinéaires, on a aussi

$$\exists D \in \mathcal{B}(l^2(H)), c_1 Id_H \leq D \leq c_2 Id_H, \quad et \quad \forall \varphi, \varphi', (\varphi|\varphi')_N = (D\varphi|\varphi')$$

□

Remarque. Le nouveau produit scalaire dépend de T. On peut aussi décrire sa représentation en terme de suites de $l^2(H)$:

$$(h|h')_N = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j-k=n} (T^{(n)}h_j|h'_k)$$

Démonstration. Soient $h, h' \in l^2(H)$. On notera $h(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\mathrm{i}k\theta}h_n$.

$$\begin{aligned}(h|h')_N &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)h(\theta)|h'(\theta))d\theta \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-\mathrm{i}n\theta}T^{(n)}e^{\mathrm{i}j\theta}h_j|e^{\mathrm{i}k\theta}h'_k)d\theta \\ &= \sum_{n,j,k\in\mathbb{Z}}(T^{(n)}h_j|h'_k)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}\theta(-n+j-k)}d\theta\end{aligned}$$

Comme $\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}N\theta}d\theta = \delta_0^N$, on obtient

$$(h|h')_N = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j-k=n} (T^{(n)}h_j|h'_k)$$

□

Théorème 4. Soit T une contraction stricte sur $\mathcal{B}(H)$. Alors T admet une dilatation unitaire U sur $l^2(H)$. De plus U est unitairement équivalent à l'opérateur de décalage S.

Démonstration. Soit $l^2(H)$ vu comme $L^2(\mathbb{T}, H)$ muni du produit scalaire $(.|.)_N$.

Soit $h \in H$ on appelle φ_h la fonction identiquement égale à h sur $\mathbb{T}$. Montrons que $J : \begin{array}{ccc} H & \to & H' \\ h & \mapsto & \varphi_h \end{array}$ est une isométrie : soient $h, h' \in H$.

$$\begin{aligned}(Jh|Jh')_N &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)h|h')_H d\theta \\ &= (T^{(0)}h|h')_H \qquad \text{d'après la formule de Poisson pour le polynôme } p = 1 \\ &= (h|h')_H.\end{aligned}$$

Ainsi J est une isométrie, c'est une inclusion de H vers $l^2(H)$.

Soit $S_0(\varphi)(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta}\varphi(\theta)$. S_0 est un opérateur de décalage sur $(l^2(H), (.|.))$. Soit S un l'opérateur de décalage d'une base de Hilbert de H'. Soit $n \in \mathbb{Z}$;

$$(S^n h|h') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}n\theta}(K_{e^{\mathrm{i}\theta}}(T)h|h')d\theta = (T^{(n)}h|h')$$

d'après la formule de Poisson pour $p(z) = z^n$ ou $p(z) = \overline{z}^n$ Ainsi on a montré

$$\forall n \in \mathbb{Z}, P_H S^n|_H = T^{(n)}$$

Donc T est une compression du shift de $l^2(H)$. □

2.5 Partie de Harnack d'une contraction

Proposition 17. *Inégalité de Harnack*

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+$ une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Soit $z \in \mathbb{D}$ et $r = |z| < 1$. Alors on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1-r}{1+r}f(0) \leq f(z) \leq \frac{1+r}{1-r}f(0)$$

Démonstration. D'après la formule de Poisson scalaire on a $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{\mathrm{i}\theta}|^2} f(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta$.

Comme $0 \leq 1-r \leq |z-e^{\mathrm{i}\theta}| \leq 1+r$ on a : $\frac{1-r}{1+r} \leq P_z(e^{\mathrm{i}\theta}) \leq \frac{1+r}{1-r}$.

$$\frac{1-r}{1+r}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta \leq f(z) \leq \frac{1+r}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta$$

Et d'après la formule de la moyenne des fonctions harmoniques, on a

$$\frac{1-r}{1+r}f(0) \leq f(z) \leq \frac{1+r}{1-r}f(0)$$

$\square$

Définition. Soient $S, T \in \mathcal{B}(H)$ deux contractions. On dit que S est *Harnack dominée* par T si il existe $c > 0$ tel que pour toute fonction $f \in A(\mathbb{D})$ de partie réelle positive, on a :

$$\forall h \in H, Re(f(S)h|h) \leq cRe(f(T)h|h)$$

Notation. On note $S \overset{H}{\prec} T$ si S est Harnack dominée par T.

S et T sont *Harnack équivalentes* lorsque $S \overset{H}{\prec} T$ et $T \overset{H}{\prec} S$.

Proposition 18. *S et T sont Harnack équivalents si et seulement si il existe $0 < c < 1$ tel que*

$$cRe(f(S)h|h) \leq Re(f(T)h|h) \leq \frac{1}{c}Re(f(S)h|h)$$

pour tout $h \in H$, pour tout $f \in A(\mathbb{D})$.

Démonstration. C'est immédiat. $\square$

Proposition 19. *S est Harnack dominée par T si et seulement si*

$$\exists c > 0, \forall z \in \mathbb{D}, K_z(S) \leq cK_z(T)$$

Démonstration. Soient S, T avec $S \overset{H}{\prec} T$ et $z \in \mathbb{D}$. Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on a $P_z(\lambda) = Re(\frac{1+\overline{z}\lambda}{1-\overline{z}\lambda}) \geq 0$. Notons $f_z(\lambda) = \frac{1+\overline{z}\lambda}{1-\overline{z}\lambda}$; $f_z \in A(\mathbb{D})$. Soit $h \in H$. Soit C la constante de Harnack domination donnée par la définition de $S \overset{H}{\prec} T$.

$$(K_z(S)h|h) = Re(f_z(S)h|h) \leq CRe(f_z(T)h|h) \leq C(K_z(T)h|h)$$

Ainsi $K_z(S) \leq CK_z(T)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Réciproque : Soit $f \in A(\mathbb{D})$ de partie réelle positive. Soit $r < 1$. On suppose : $\forall z \in \mathbb{D}, K_z(S) \leq K_z(T)$

$$\begin{aligned} Re(f(rS)h|h) &= Re(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)f(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta)h|h) \quad \text{d'après la formule de Poisson} \\ &= (\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Re(f(e^{\mathrm{i}\theta}))(K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(S)h|h)d\theta) \\ &\leq cRe(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)f(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta) \text{ car tous les termes sont positifs} \\ &\leq Re(f(rT)h,h) \end{aligned}$$

L'inégalité se prolonge à $r = 1$, donc $S \overset{H}{\prec} T$. $\square$

Corollaire. S et T sont Harnack équivalentes si et seulement si

$$\exists c \in]0,1[, \forall z \in \mathbb{D}, cK_z(T) \leq K_z(S) \leq \frac{1}{c}K_z(T)$$

Exemple. Soit T une stricte contraction : $||T|| < 1$. Alors T est Harnack équivalente à l'opérateur nul.

Démonstration. Dans la partie 2.4 on a montré que si T est une contraction stricte avec $||T|| = r$, alors pour tout $h \in H$,

$$c_1||h||^2 \leq (K_z(T)h|h) \leq c_2||h||^2$$

Comme $K_z(0) = Id_H$, on obtient que T est Harnack équivalent à 0. □

Nous énonçons la propriété suivante, qui généralise le résultat prouvé en 2.4 :

Théorème 5. (i) Si S et T sont deux contractions Harnack équivalentes, il existe une dilatation unitaire U_S de S et une dilatation unitaire U_T de T vérifiant : U_S et U_T sont unitairement équivalentes.

3 Opérateurs de classe C_ρ

Dans cette partie, on introduit les $\rho-$contractions pour $\rho > 0$. Quand $\rho \geq 1$, on peut ainsi généraliser la notion de contraction. Même si la définition des classes C_ρ d'opérateurs s'énonce en termes de dilatations unitaires, on peut en donner une caractérisation avec le noyau de Poisson : $T \in C_\rho \Leftrightarrow K_z(T) \geq (1-\rho)Id_H$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On peut ensuite introduire des normes w_ρ qui approchent le rayon spectral de T quand $\rho \to \infty$. On verra aussi que les $\rho-$contractions sont denses dans l'ensemble des opérateurs à puissances bornées.

3.1 Classes C_ρ, définitions et propriétés

Définition. Soit $\rho > 0$, $T \in \mathcal{B}(H)$. On dit que T est une *ρ-contraction* lorsqu'il existe $H' \supset H$ espace de Hilbert tel que H est fermé dans H', et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{B}(H')$ vérifiant

$$\forall n \geq 1, T^n = \rho P_H U^n|_H$$

où P_H est la projection orthogonale sur H. L'ensemble des $\rho-$contractions de $\mathcal{B}(H)$ est noté C_ρ.

Remarque. L'écriture $T^n = \rho P_H U^n|_H$ n'est pas valide pour $n = 0$ sauf pour $\rho = 1$.

Lemme. Soit H, H' deux espaces de Hilbert, $H \subset H'$ et H fermé dans H'.
(i) L'application d'inclusion $j_H : H \to H', j(h) = h$ est linéaire continue.
(ii) Son application duale $j_H^* : H' \to H$ est la projection orthogonale sur H : $j_H^* = P_H$

Démonstration. Soit $x \in H, y \in H'$.
$||j_H(x)||_{H'} = ||x||_{H'} = ||x||_H$. Comme H, H' sont des espaces de Hilbert, on a donc $||j_H|| = 1$ et en particulier j_H continue.
$(j_H x|y)_{H'} = (x|y)_{H'} = (x|j_H^* y)_H$. Quel que soit x on a $(x|y - j_H^* y) = 0$, ainsi $y - j_H^* y \in H^\perp$ et $j_H^* y \in H$. L'identité est vraie quel que soit $y \in H'$, et elle caractérise la projection orthogonale sur H. Donc $j_H^* = P_H$. □

Corollaire. *Stabilité par adjoint : $T \in C_\rho \Rightarrow T^* \in C_\rho$*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T est une $\rho-$contraction, on peut l'écrire $T^n = \rho P_H U^n|_H$, ou encore $T^n = \rho P_H U^n j_H$.
$(T^*)^n = (T^n)^* = (\rho P_H U^n j_H)^* = \rho j_H^* (U^*)^n P_H^* = \rho P_H (U^*)^n j_H$. Ainsi pour $V = U^* = U^{-1}$ on a

$$T^{*n} = \rho P_H V^n|_H$$

□

Proposition 20. *Stabilité par puissances :*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $T \in C_\rho$. Alors $T^n \in C_\rho$.

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(T^n)^k = T^{nk} = \rho P_H (U^n)^k|_H$. Donc $T^n \in C_\rho$ et U^n est une $\rho-$dilatation de T^n. □

Remarque. Pour $\rho = 1$, l'ensemble des $\rho-$contractions est l'ensemble des contractions au sens usuel d'après le théorème des dilatations de Nagy.

Proposition 21. Si $T \in C_\rho$, T est à puissances bornées. En particulier,

$$T \in C_\rho \Rightarrow \sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$$

Démonstration. On écrit $T^n = \rho P_H U^n j_H$, où j_H est l'inclusion $j_H : H \to H'$. Soit $n \in \mathbb{N}$, si $n = 0$, $T^n = Id_H$ donc $||T^n|| = 1$; si $n > 0$,

$$\begin{aligned} ||T^n|| &= ||\rho P_H U^n j_H|| \\ &\leq \rho ||P_H|| \, ||U^n|| \, ||j_H|| \leq \rho \end{aligned}$$

car $||P_H|| = ||U^n|| = ||j_H|| = 1$. Ainsi les puissances de T sont bornées par $1 + \rho$.
$r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq \lim\limits_{n\to\infty} (1+\rho)^{\frac{1}{n}} = 1$. Donc $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$. □

Remarque. Soit $\rho > 0$ et $T \in C_\rho$. Comme $r(T) \leq 1$, on peut définir le noyau de Poisson $K_z(T)$ pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$.

Théorème 6. *Inégalité de Von Neumann pour les opérateurs C_ρ*
Soit $T \in C_\rho$ et $f \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme. Alors on a

$$||f(T)|| \leq \sup_{z \in \mathbb{D}} |\rho f(z) + (1-\rho)f(0)|$$

Démonstration. Soit U une $\rho-$dilatation unitaire de T dans H'. Pour tout $k \geq 1$, on a $T^k = \rho P_H U^k j_H$, et $T^0 = P_H Id_{H'} j_H$. Ainsi $f(T) = P_H(\rho f(U) + f(0)(1-\rho)Id_{H'})j_H$.

$$\begin{aligned}||f(T)|| &= ||P_H(\rho f(U) + f(0)(1-\rho)Id_{H'})j_H|| \\ &\leq ||\rho f(U) + (1-\rho)f(0)Id_{H'}|| \\ &\leq r(\rho f(U) + (1-\rho)f(0)Id_{H'})\end{aligned}$$

En effet, $\rho f(U) + (1-\rho)f(0)Id_{H'}$ est normal, donc son rayon spectral est égal à sa norme. De plus, $\mu \in \sigma(\rho f(U) + (1-\rho)f(0)Id_{H'}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \sigma(T), \mu = \rho f(\lambda) + (1-\rho)f(0)$. On a ainsi :
$r(\rho f(U) + (1-\rho)f(0)Id_{H'}) = \sup_{z \in \sigma(T)} |\rho f(z) + (1-\rho)f(0)| \leq \sup_{|z| \leq 1} |\rho f(z) + (1-\rho)f(0)|$ car $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$.
Donc $||f(T)|| \leq \sup_{|z| \leq 1} |\rho f(z) + (1-\rho)f(0)|$ □

3.2 Noyau de Poisson et opérateurs C_ρ

On a vu précédemment que la positivité du noyau de Poisson caractérise les contractions. L'objet de cette partie est de prouver qu'un analogue du noyau de Poisson caractérise les $\rho-$contractions.

Définition. Soit $z \in \mathbb{D}, \rho > 0, T \in \mathcal{B}(H), r(T) \leq 1$. On définit le $\rho-$*noyau de Poisson* par :

$$K_z^\rho(T) = K_z(T) + (\rho - 1)Id_H$$

Notation. $K_z^\rho(T) = \rho Id_H + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{z}T)^n + (zT^*)^n = \rho Id_H + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*}^{\infty} (\overline{z}T)^{(n)}$

Rappel : pour $T \in \mathcal{B}(H)$ on note $T^{(n)} = T^n$ si $n \geq 0$, $T^{(n)} = T^{*n}$ sinon.
En notant $T_\rho^{(n)} = \rho Id_H$ si $n = 0$; $T_\rho^{(n)} = T^n$ si $n > 0$; $T_\rho^{(n)} = T^{*n}$ si $n < 0$, on a donc

$$K_z^\rho(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\overline{z}T)_\rho^{(n)}$$

Lemme. Soit $T \in C_\rho$, $U \in \mathcal{B}(H)$ une $\rho-$dilatation unitaire de T, $z \in \mathbb{D}$. Alors on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\overline{z}U)^{(n)} = Re((Id_H + \overline{z}U)(Id_H - \overline{z}U)^{-1})$$

et

$$K_z^\rho(T) = \rho P_H Re(Id_H + \overline{z}U)(Id_H - \overline{z}U)^{-1})|_H$$

Démonstration.
$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\overline{z}U)^{(n)} &= Id_H + \sum_{n>0} (\overline{z}U)^n + (zU)^{*n} \\ &= Id_H + 2Re(\sum_{n>0} (\overline{z}U)^n) \\ &= Re(Id_H + 2(Id_H - \overline{z}U)^{-1} - 2Id_H) \\ &= Re((Id_H + \overline{z}U)(Id_H - \overline{z}U)^{-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_z^\rho(T) &= \rho Id_H + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (\overline{z}T)^{(n)} \\ &= \rho Id_H + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \rho P_H (\overline{z}U)^{(n)}|_H \\ &= \rho P_H Re(Id_H + \overline{z}U)(Id_H - \overline{z}U)^{-1})|_H\end{aligned}$$
□

Proposition 22. Soit $T \in \mathcal{B}(H), \rho > 0$. Si $T \in C_\rho$, alors

$$\forall z \in \mathbb{D}, K_z^\rho(T) \geq 0$$

Démonstration. Soit $h \in H$ et $h' = (Id_H - \overline{z}U)^{-1}h$. En utilisant le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned}(K_z^\rho(T)h|h) &= \rho Re((Id_H + \overline{z}U)(Id_H - \overline{z}U)^{-1})h|h) \\ &= \rho Re((Id_H + \overline{z}U)h'|(Id_H - \overline{z}U)^{-1})h') \\ &= \rho(||h'|| - |z|^2||Uh'||) \geq 0\end{aligned}$$

car U est unitaire donc c'est une contraction. □

Et en fait, la positivité du $\rho-$noyau de Poisson caractérise les opérateurs de classe C_ρ !

Théorème 7. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ avec $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Alors

$$T \in C_\rho \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D}, K_z(T) \geq (1-\rho)Id_H$$

Définition. On note H_0 l'ensemble des suites à support fini de $l^2(H)$. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(H)$.

$$(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in H_0 \Leftrightarrow \{n, h_n \neq 0\} \ est\ fini$$

H_0 n'est pas un espace de Hilbert.

Lemme. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ tel que $K_z(T) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On définit sur H_0 la forme sesquilinéaire :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} H_0 \times H_0 & \to & \mathbb{C} \\ h, h' & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{\rho}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{i-j=n}(T_\rho^{(n)}h_i|h'_j) \end{array}$$

Φ est positive, éventuellement dégénérée.

Démonstration. Soient h, h' deux suites à support fini de $l^2(H)$; on peut les voir comme des fonctions de θ en écrivant : $h(\theta) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{i\theta}$.

Remarquons d'abord :

$$\Phi(h, h') = \frac{1}{\rho}\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(K^\rho_{re^{i\theta}}(T)h(\theta)|h'(\theta))d\theta$$

Soit $r < 1$ et Φ_r défini par

$$\Phi_r(h, h') = \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}(K^\rho_{re^{i\theta}}(T)h(\theta)|h'(\theta))d\theta$$

$$\begin{aligned}\Phi_r(h|h') &= \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}(K^\rho_{re^{i\theta}}(T)h(\theta)|h'(\theta))d\theta \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} r^{|n|}(e^{-in\theta}T_\rho^{(n)}e^{ij\theta}h_j|e^{ik\theta}h'_k)d\theta\end{aligned}$$

car deux sommes sont finies et la somme en n converge uniformément en θ dans $\mathcal{B}(H)$

$$\begin{aligned}\Phi_r(h|h') &= \frac{1}{\rho}\sum_{n,j,k\in\mathbb{Z}} r^{|n|}(T_\rho^{(n)}h_j|h'_k)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta(-n+j-k)}d\theta \\ &= \frac{1}{\rho}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j-k=n} r^{|n|}(T_\rho^{(n)}h_j|h'_k)\end{aligned}$$

Comme les sommes sont finies, cette quantité tend vers $\Phi(h,h')$ quand $r \to 1$.

Soit $h \in H_0$; alors $\Phi(h,h) = \lim\limits_{r\to 1} \Phi_r(h,h)$; soit $r < 1$,

$$\Phi_r(h,h) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} (K^{\rho}_{re^{i\theta}}(T)h(\theta)|h(\theta))d\theta \geq 0$$

car on a supposé $K^{\rho}_z(T)$ est positif pour tout $z \in \mathbb{D}$. Donc $\forall h \in H_0, \Phi(h,h) \geq 0$. □

Démonstration. Preuve du théorème :

Soit H_0 muni de la forme sesquilinéaire positive Φ définie précédemment. On note $Z = \{h \in H_0, \Phi(h,h) = 0\}$; Z est un sous espace de H_0. Soit $H_1 = H_0/Z$ l'espace quotient, muni de la projection de Φ puisque Φ ne dépend pas du représentant modulo Z. De plus sur H_1, Φ est non dégénérée : H_1 est un espace pré-hilbertien.

Soit H' le complété de Cantor de H_1 pour Φ. Alors H est un sous espace fermé de H', H' est un espace de Hilbert muni de Φ, et l'image S du shift sur H_0 dans H' est une dilatation unitaire de T.

$$H = \{((h_n)_{n\in\mathbb{Z}}, h_0 \in H, \forall n \neq 0, h_n = 0, h \in H\} \subset H_0$$

$H \cap Z = \{0\}$ donc H est isométriquement équivalent à sa projection dans H_1 ; comme H est un espace de Hilbert et que la restriction de Φ à H est le produit scalaire de départ de H, H est fermé dans H_1, isométriquement équivalent à son image dans H' et fermé dans H'.

Soit $U_0 : \begin{array}{ccc} H_0 & \to & H_0 \\ (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (h_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$;

Montrons que U_0 stabilise Z, on pourra ainsi la passer au quotient : soit $h \in Z$, on a ainsi :

$\Phi(h,h) = \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i-j=n} (T_\rho^{(n)} h_i | h_j) = 0$. Comme $U_0 h = (h_{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$ on a

$$\Phi(U_0h, U_0h) = \frac{1}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i-j=n} (T_\rho^{(n)} h_{i-1} | h_{j-1}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i-j=n} (T_\rho^{(n)} h_i | h_j) = 0$$

Comme $U_0(Z) \subset Z$, on peut donc définir U_0 sur $H_1 = H_0/Z$ car l'image par U_0 ne dépend pas du représentant. Par densité de H_1 dans H', on définit ensuite $U : H' \to H'$ l'unique opérateur qui prolonge U_0. Soit $h, h' \in H$. Donc $h, h' \in H_0$; $h_i = h'_i = 0$ si $i \neq 0$; $h_0 = h$; $h'_0 = h'$. Soit $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
(U^k h | h')_{H'} &= (U_0^k h | h')_{H'} \\
&= \frac{1}{\rho} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i-j=n} (T_\rho^{(n)} (U^k h)_i | h'_j) \\
&= \frac{1}{\rho} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i-j=n} (T_\rho^{(n)} h_{i-k} | h'_j) \qquad \text{et } j = 0, i = k, n = k \text{ est le seul terme non nul} \\
&= \frac{1}{\rho} (T_\rho^{(k)} h_0 | h'_0) \\
&= \frac{1}{\rho} (T^k h | h')
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{1}{\rho} T^k = P_H U^k|_H$, ou encore,

$$T^k = \rho P_H U^k|_H$$

□

3.3 Propriétés des opérateurs de classe C_ρ

Proposition 23. Soient $\rho, \rho' > 0$, $\rho \leq \rho' \Rightarrow C_\rho \subset C_{\rho'}$. En particulier, si T est une contraction, alors $T \in C_\rho$ pour tout $\rho \geq 1$.

Démonstration. Soit $T \in C_\rho, z \in \mathbb{D}$;
$K_z(T) \geq (1-\rho)Id_H \geq (1-\rho')Id_H$ car $\rho \leq \rho'$. Donc $T \in C_{\rho'}$. $\square$

Proposition 24. - C_ρ est équilibrée : si $|\lambda| = 1, T \in C_\rho \Leftrightarrow \lambda T \in C_\rho$.
- C_ρ est étoilée par rapport à 0 : si $R \in [0,1]$, $T \in C_\rho \Rightarrow RT \in C_\rho$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$.
$T \in C_\rho \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D}, K_z(T) \geq (1-\rho)Id_H$
$\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D}, K_{\overline{\lambda}z}(T) \geq (1-\rho)Id_H$
$\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D}, K_z(\lambda T) \geq (1-\rho)Id_H \Leftrightarrow \lambda T \in C_\rho$
Soit $R \in \mathbb{R}, 0 \leq R \leq 1$;
$T \in C_\rho \Rightarrow \forall z \in \mathbb{D}, K_z(T) \geq (1-\rho)Id_H$
$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{D}, K_{Rz}(T) \geq (1-\rho)Id_H$
$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{D}, K_z(RT) \geq (1-\rho)Id_H \Rightarrow RT \in C_\rho$ $\square$

Théorème 8. *Caractérisations :*

$$T \in C_\rho \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D}, \forall h \in H, ||h||^2 - 2(1-\frac{1}{\rho})Re(zTh|h) + (1-\frac{2}{\rho})||zTh||^2 \geq 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}} \quad et \quad \forall z \in \mathbb{D}, \forall h \in H, (\rho-2)||h||^2 + 2Re(h|(Id_H - zT)^{-1}h) \geq 0 \quad (**)$$

Démonstration. Soit $T \in C_\rho$. Alors $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ et $K_{\overline{z}}(T) \geq (1-\rho)Id_H$.
$K_{\overline{z}}(T) + (\rho-1)Id_H \geq 0 \Leftrightarrow \forall z, h, ((Id_H - zT)^{-1}h|h) + ((Id_H - \overline{z}T^*)^{-1}h|h) - (h|h) + (\rho-1)(h|h) \geq 0$
$\Leftrightarrow \forall z, h, (\rho-2)(h|h) + 2Re(h|(Id_H - zT)^{-1}h) \geq 0$
On a ainsi montré $T \in C_\rho \Leftrightarrow (**)$; Montrons que $(*)$ et $(**)$ sont équivalentes.
Soit T vérifiant $(**)$. Soit $z \in \mathbb{D}$, et $h \in H$. Soit $h' = (Id_H - \overline{z}T)h$ et $z' = -z$. On applique $(**)$ à z', h', on a ainsi :
$0 \leq 2Re(h'|(Id_H - z'T)^{-1}h') + (\rho-2)||h'||^2$
$\leq 2Re((Id_H - z'T)h|h) + (\rho-2)((Id_H - z'T)h|(Id_H - z'T)h)$
$\leq 2||h||^2 - 2Re(z'Th|h) + (\rho-2)||h||^2 + (\rho-2)||z'Th||^2 + 2(2-\rho)Re(zTh|h)$
$\leq \rho||h||^2 + (\rho-2)||zTh||^2 - 2(\rho-1)Re(zTh|h)$
En divisant ce terme par ρ on obtient $(*)$. On peut remarquer que $(*)$ entraîne l'inégalité $(**)$ si l'on admet l'inversibilité de $(Id_H - zT)$. Donc il ne reste qu'à prouver : T vérifie $(*) \Rightarrow r(T) \leq 1$.
Supposons par l'absurde que $\sigma(T) \not\subset \overline{\mathbb{D}}$. Alors il existe $z_0 \in \mathbb{D}$, $\frac{1}{z_0} \in \partial\sigma(T)$. Alors $\frac{1}{z_0}$ est une valeur propre approchée de T. On a : $\exists (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H, \forall n \in \mathbb{N}, ||h_n|| = 1, ||(T - \frac{1}{z_0}Id_H)h_n|| \to 0$.
En particulier, $\lim_{n\to\infty} ||z_0Th_n|| = \lim_{n\to\infty} ||h_n|| = 1$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|(z_0Th_n|h_n) - 1| = |(z_0Th_n - h_n|h_n)| \leq ||z_0Th_n - h_n||$, et cette quantité tend vers 0. Ainsi $\lim_{n\to\infty}(z_0Th_n|h_n) = 1$.
Soit $0 < r < 1 - |z_0|$ et $z = (1+r)z_0$; $z \in \mathbb{D}$, on applique l'inégalité $(*)$ pour z, h_n :

$$1 + (1-\frac{2}{\rho})(1+r)^2||z_0Th_n||^2 - 2(1+r)(1-\frac{1}{\rho})Re(z_0Th_n|h_n) \geq 0$$

En passant à la limite $(n \to \infty)$, pour tout $0 < r < 1 - |z_0|$ on a $(\rho-2)r^2 - 2r \geq 0$. Cette identité est absurde pour r suffisamment proche de 0. Donc $(*) \Rightarrow \sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$. $\square$

3.4 Exemples et cas particuliers

Définition. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. *L'image numérique* de T est définie par

$$W(T) = \{(Th|h), ||h|| = 1\}$$

Le *rayon numérique* de T noté $w(T)$ est défini par $w(T) = \sup_{z\in W(T)} |z| = \sup_{||h||\leq 1} |(Th|h)|$

Proposition 25. Pour $\rho = 2$: $T \in C_2 \Leftrightarrow w(T) \leq 1$

Démonstration. On utilise $(*)$:

$$T \in C_\rho \Leftrightarrow \forall h, \forall z \in \mathbb{D}, ||h||^2 + (1 - \frac{2}{\rho})||zTh||^2 - 2(1 - \frac{1}{\rho})Re(zTh|h) \geq 0$$

Soit $T \in C_2$; $\forall z \in \mathbb{D}, \forall h \in H, ||h||^2 \geq (zTh|h)$. Par continuité du produit scalaire l'inégalité s'étend sur $\overline{\mathbb{D}}$, de plus $\max_{z \in \overline{\mathbb{D}}}(zTh|h) = |(Th|h)|$. Soit $h \in H, ||h|| \leq 1$. Alors $|(Th|h)| \leq 1$. Donc $w(T) \leq 1$.

Réciproque : soit T tel que $w(T) \leq 1$. Alors $|(Th|h)| \leq ||h||^2$ pour tout $h \in H$. Pour $z \in \mathbb{D}$, on a $Re(zTh|h) \leq |(Th|h)| \leq ||h||^2$. Donc T vérifie (*) pour $\rho = 2$, ainsi $T \in C_2$. □

Proposition 26. $T \mapsto w(T)$ est une norme sur $\mathcal{B}(H)$.

Ce résultat est prouvé dans un cas plus général en section "normes w_ρ".

Exemple. Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ a-t-on $\lambda Id_H \in C_\rho$?

Pour commencer, on a déjà vu que les classes C_ρ sont équilibrées, donc $\lambda Id_H \in C_\rho \Leftrightarrow |\lambda| Id_H \in C_\rho$. On se ramène donc à $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lambda Id_H \in C_\rho \Rightarrow \lambda \leq 1$, car tout opérateur de classe C_ρ est de rayon spectral inférieur à 1.

Soit $\lambda \leq 1$. $K_z(\lambda Id_H) = K_{\lambda z}(Id_H) = P_{\lambda z}(1) Id_H$.

$$\begin{aligned}\lambda Id_H \in C_\rho &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D}, K_z(\lambda Id_H) \geq (1-\rho) Id_H \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D} P_{\lambda z}(1) Id_H \geq (1-\rho) Id_H \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D}, \frac{1-|z\lambda|^2}{|1-z\lambda|^2} \geq (1-\rho) \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \geq (1-\rho)\end{aligned}$$

Si $\rho \geq 1$, cette identité est toujours vérifiée car le noyau de Poisson est positif. Pour $\rho < 1$ l'inégalité s'exprime aussi $\lambda \leq \frac{\rho}{2-\rho}$. Finalement on a :

Si $\rho \geq 1, \lambda Id_H \in C_\rho \Leftrightarrow |\lambda| \leq 1$

Si $\rho < 1, \lambda Id_H \in C_\rho \Leftrightarrow |\lambda| \leq \frac{\rho}{2-\rho}$

Exemple. Soit $s > 0$ et $T_s = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ défini sur $H = \mathbb{C}^2$. Alors $T_s \in C_s$.

$\sigma(T) = \{0\} \subset \overline{\mathbb{D}}$. On peut donc définir $K_z(T) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{z}s \\ zs & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Soit $h = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

$((K_z(T) + (s-1)Id_H)h|h) = (s \begin{pmatrix} 1 & \overline{z} \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = s(|x|^2 + |y|^2 - 2Re(zx\overline{y})) \geq 0$

Donc $T_s \in C_s$; de plus comme $||T_s|| = s$, on a $\forall r < s, T_s \notin C_r$. En particulier, les inclusions des classes C_ρ sont strictes dès que $dim(H) \geq 2$.

Remarque. On a vu que les opérateurs C_ρ sont à puissances bornées, mais la réciproque n'est pas vraie. On peut construire un contre-exemple sur $H = L^2([-1,1], \mathbb{C})$:

Soit $V : H \to H$, $Vf(x) = f(-x)$. Soit $A = M_a$ la multiplication par $a(x) = \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & si \;\; x \leq 0 \\ \sqrt{2} & sinon \end{matrix}$. Alors l'opérateur $T = A^{-1}VA$ est à puissances bornées par 2 ; on vérifie pour cela :

$$Tf(x) = \begin{matrix} 2f(-x) & si \;\; x \leq 0\mathbb{C} \\ \frac{1}{2}f(-x) & sinon \end{matrix}$$

Ensuite on peut montrer que T n'est dans aucune classe C_ρ alors que $\forall n \in \mathbb{N}, ||T^n|| \leq 2$

3.5 "Normes" w_ρ

On a déjà remarqué que C_1 est la boule unité de la norme $||.||$ sur H. On a par ailleurs mentionné que C_2 est la boule unité de la norme $w(.)$ sur H.

On introduit ici des fonctions $w_\rho : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{R}_+$ qui sont parfois des normes, dont les "boules unités" sont les classes C_ρ.

Définition. Soit $\rho > 0$ et $T \in \mathcal{B}(H)$. On définit le *rayon $\rho-$numérique de T* par

$$w_\rho(T) = \inf\{R > 0, \frac{T}{R} \in C_\rho\}$$

Proposition 27. Soit $\rho, \rho' > 0, T \in \mathcal{B}(H), \lambda \in \mathbb{C}$.
(i) $\infty > w_\rho(T) \geq r(T)$
(ii) $w_\rho(\lambda T) = |\lambda| w_\rho(T)$
(iii) $w_\rho(T) \leq 1 \Leftrightarrow T \in C_\rho$
(iv) Si $\rho \geq \rho'$, $w_\rho(T) \leq w_{\rho'}(T)$
(v) Si T est normal, $w_\rho(T) = ||T||$ pour tout $\rho \geq 1$

Démonstration. *(i)* : pour $w_\rho(T) < \infty$ il suffit de remarquer que pour R assez grand, $\frac{T}{R} \in C_\rho$. Soit $R \geq ||T||$; alors $r(\frac{T}{R}) \leq 1$ donc la somme suivante a du sens :
$Id_H - \frac{2}{\rho} Re \sum_{k=1}^{\infty}((\frac{zT}{R})^n) \geq (1 - \frac{2}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty}(|\frac{1}{R}|.||T||)^n) Id_H = \lambda Id_H$, et $\lambda \geq 0$ dès que $R \geq ||T||(1+\frac{2}{\rho})$. Alors $\frac{T}{R} \in C_\rho$ et donc $w_\rho(T) \leq R$; En admettant *(iii)*, on a aussi $r(\frac{T}{w_\rho(T)}) \leq 1$ car c'est une $\rho-$contraction, ainsi $w_\rho(T) \geq r(T)$.

(ii) Les classes C_ρ sont équilibrées : si $|\lambda| = 1$, $\lambda T \in C_\rho \Leftrightarrow T \in C_\rho$.
$w_\rho(\lambda T) = \inf\{R > 0, \frac{\lambda T}{R} \in C_\rho\}$
$= \inf\{|\lambda| R > 0, \frac{T}{R} \in C_\rho\}$
$= |\lambda| w_\rho(T)$.

(iii) Les classes C_ρ sont étoilées par rapport à 0.
$w_\rho(T) \leq 1 \Leftrightarrow \forall R > 1, \frac{T}{R} \in C_\rho$
$\Leftrightarrow \forall R > 1, \forall |z| < 1, K_z(\frac{T}{R}) \geq (1-\rho) Id_H$
$\Leftrightarrow \forall R < 1, \forall |z| < 1, K_{Rz}(T) \geq (1-\rho) Id_H$
$\Leftrightarrow T \in C_\rho$

On trouve ainsi $\frac{T}{w_\rho(T)} \in C_\rho$ (qu'on a utilisé pour montrer *(i)*). Par ailleurs pour $\rho = 1$ on a :

$$w_1(T) = ||T||$$

(iv) $\frac{T}{w_\rho(T)} \in C_\rho \subset C_{\rho'}$, donc $w_\rho(T) \geq w_{\rho'}(T)$.

(v) Si $\rho \geq 1$ et T normal, $||T|| = w_1(T) \geq w_\rho(T) \geq r(T) = ||T||$. Donc $\forall \rho \geq 1$, $w_\rho(T) = ||T||$. □

Exemple. - $w_2(T) = w(T)$: comme on l'a mentionné dans la section "exemples", $w(T) \leq 1 \Leftrightarrow T \in C_2$. Par définition de w_2 on a donc $w_2 = w$.

On établit un lemme de topologie avant de se lancer dans la preuve suivante.

Lemme. Soit $\varphi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{R}_+$ homogène de degré 1, avec $\varphi(T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$. Alors φ est une norme si et seulement si sa boule unité $B := \{T \in \mathcal{B}(H), \varphi(T) \leq 1\}$ est convexe.

Démonstration. On suppose φ est une norme. Soient $T, T' \in B, \lambda \in [0,1]$, alors $\varphi(\lambda T + (1-\lambda)T') \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$, donc B est convexe.

Réciproquement, on suppose que B est convexe. Alors $RB = \{T, \varphi(T) \leq R\}$ est convexe pour tout $R \geq 0$. Soient T, T' deux opérateurs non nuls. Il existe $\lambda \in]0,1[$, $\frac{\varphi(T)}{\lambda} = \frac{\varphi(T')}{1-\lambda} = R$.

$\varphi(T + T') = \varphi(\lambda \frac{T}{\lambda} + (1-\lambda)\frac{T'}{1-\lambda}) \leq R$ car $\frac{T}{\lambda}, \frac{T'}{1-\lambda} \in RB$, et RB est convexe. Ainsi, $\varphi(T + T') \leq \lambda R + (1-\lambda)R = \varphi(T) + \varphi(T')$. □

Proposition 28. Soit $\rho > 0$, $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors
(i) $w_\rho(\lambda T) = |\lambda| w_\rho(T)$
(ii) $w_\rho(T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$
(iii) Si $\rho \leq 2$, $w_\rho(T + T') \leq w_\rho(T) + w_\rho(T')$

Démonstration. On a déjà établi le premier point ; pour montrer *(ii)* on va montrer un résultat plus fort : $w_\rho(T) \geq \frac{1}{\rho}||T||$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\dfrac{||T||}{\rho} - \varepsilon > 0$. Alors $||\dfrac{T}{\frac{||T||}{\rho} - \varepsilon}|| = \rho \dfrac{||T||}{||T|| - \rho\varepsilon} > \rho$. Ainsi, $\dfrac{T}{\frac{||T||}{\rho} - \varepsilon} \notin C_\rho$, donc $\frac{1}{\rho}||T|| - \varepsilon < w_\rho(T)$. Comme cela marche pour tout ε assez petit, $w_\rho(T) \geq \frac{1}{\rho}||T||$. On en déduit $w_\rho(T) = 0 \Rightarrow ||T|| = 0 \Rightarrow T = 0$. De plus $0 \in C_\rho$ donc $w_\rho(0) = 0$.

On va prouver l'inégalité triangulaire par la convexité de C_ρ si $\rho \leq 2$.

(iii) $- 1^{ere}$ étape : on reformule la propriété (**). Soit $\rho \leq 2$, et T, $r(T) \leq 1$. Alors

$$T \in C_\rho \Leftrightarrow \forall h \in H, \forall z \in \overline{\mathbb{D}}, 2Re((Id_H - zT)h|h) \geq (2-\rho)||(Id_H - zT)h||^2$$

En effet, $(Id_H - zT)$ est inversible, soit $h' = (Id_H - zT)h$; en appliquant $(**)$ à h', on a :

$$\begin{aligned} T \in C_\rho &\Rightarrow \forall h' \in H, \forall z \in \mathbb{D}, 2Re(h'|(Id_H - zT)^{-1}h') + (\rho - 2)||h'||^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \forall h \in H, \forall z \in \mathbb{D}, 2Re((Id_H - zT)h|h) \geq (2-\rho)||(Id_H - zT)h||^2 \end{aligned}$$

On étend l'inégalité à $\overline{\mathbb{D}}$ par prolongement des inégalités, car chaque terme a une limite quand $z \to 1$.

-2^{eme} étape : $||.||^2$ est une fonction convexe sur H. Soient $x, y \in \mathcal{B}(H)$, soient $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$. On a $||\lambda x + \mu y||^2 = \lambda^2||x||^2 + \mu^2||y||^2 + 2\lambda\mu Re(x|y)$; Donc :

$$\begin{aligned} \lambda||x||^2 + \mu||y||^2 - ||\lambda x + \mu y||^2 &= (\lambda - \lambda^2)||x||^2 + (\mu - \mu^2)||y||^2 - 2\lambda\mu Re(x|y) \\ &= \lambda\mu(||x||^2 + ||y||^2 - 2Re(x|y)) \\ &\geq \lambda\mu(||x||^2 + ||y||^2 - 2||x||.||y||) \\ &= \lambda\mu(||x|| - ||y||)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

-3^{eme} étape : convexité de C_ρ. Soit $T, T' \in C_\rho$, $\lambda, \mu \in [0,1]$, $\lambda + \mu = 1$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

$$\begin{aligned} 2Re((Id_H - z(\lambda T + \mu T')h|h) &= \lambda 2Re((Id_H - zT)h|h) + \mu 2Re((Id_H - zT')h|h) \\ &\geq (2-\rho)(\lambda||(Id_H - zT)h||^2 + \mu||(Id_H - zT')h||^2) \\ &\geq (2-\rho)||\lambda(Id_H - zT)h + \mu(Id_H - zT')h||^2 \\ &\geq (2-\rho)||Id_H - (\lambda zT + \mu zT')h||^2 \end{aligned}$$

Donc $\lambda T + \mu T' \in C_\rho$ □

Corollaire. Si $\rho \leq 2$, $w_\rho(.)$ est une norme équivalente à $||.||$ sur $\mathcal{B}(H)$.

Démonstration. D'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{\rho}||T|| \leq w_\rho(T) \leq ||T||(1 + \dfrac{2}{\rho})$ □

Corollaire. L'image numérique $w(T) := \sup\limits_{||h||=1} |(Th|h)|$ est une norme sur $\mathcal{B}(H)$.

Définition. Deux opérateurs $T, T' \in \mathcal{B}(H)$ *commutent doublement* lorsque T' commute avec T et T^*. La relation est symétrique.

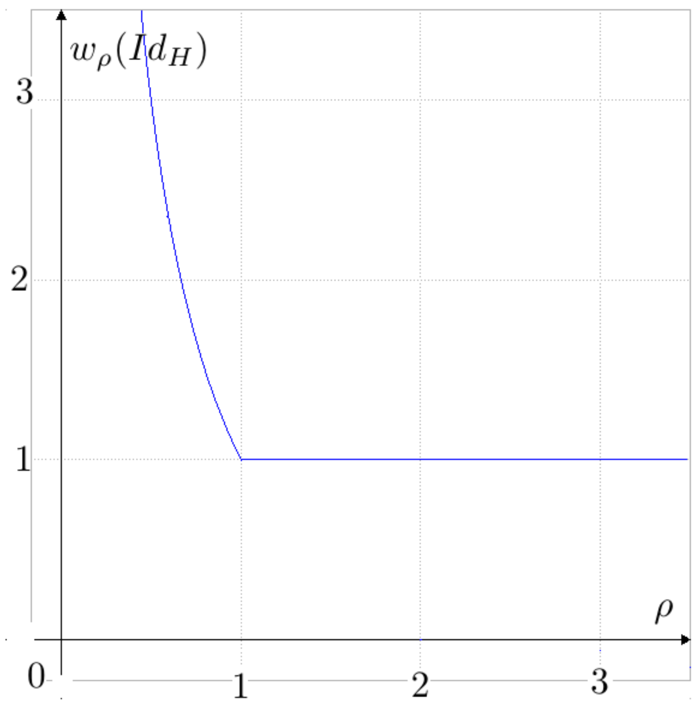
Proposition 29. Soit $T \in \mathcal{B}(H), \rho > 0, n \in \mathbb{N}^*$; alors $w_\rho(T^n) \leq w_\rho(T)^n$

Démonstration. On a déjà remarqué que les classes C_ρ sont stables par puissances, c'est immédiat avec la définition. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors $\dfrac{T}{w_\rho(T)} \in C_\rho$. Comme C_ρ est stable par puissances on a $w_\rho((\dfrac{T}{w_\rho(T)})^n) \leq 1$; d'après l'homogénéité de w_ρ on obtient

$$w_\rho(T^n) \leq w_\rho(T)^n$$

□

Exemple. $w_\rho(Id_H) = \begin{cases} 1 & si \quad \rho \geq 1 \\ \dfrac{2-\rho}{\rho} & sinon \end{cases}$



Pour $\rho \geq 1$, on a $\lambda Id_H \in C_\rho \Leftrightarrow |\lambda| \leq 1$. Donc $\dfrac{Id_H}{R} \in C_\rho \Leftrightarrow R \geq 1$ et ainsi $w_\rho(Id_H) = 1$. Si $\rho \leq 1$, $\lambda Id_H \in C_\rho \Leftrightarrow \lambda \leq \dfrac{\rho}{2-\rho}$, et de même on obtient $w_\rho(Id_H) = \dfrac{2-\rho}{\rho}$.

Exemple. Soit $s > 0$, $T_s = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $T_s \in C_\rho \Leftrightarrow s \geq \rho$. De plus $\dfrac{T_s}{R} = T_{\frac{s}{R}}$; donc $\dfrac{T_s}{R} \in C_\rho \Leftrightarrow \dfrac{s}{R} \geq \rho \Leftrightarrow R \leq \dfrac{s}{\rho}$. Donc $w_\rho(T_s) = \dfrac{s}{\rho}$

Proposition 30. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$.
(i) Si $T \neq 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} w_\rho(T) = +\infty$
(ii) $\lim\limits_{\rho \to \infty} w_\rho(T) = r(T)$

Démonstration. (i) est clair d'après $w_\rho(T) \geq \frac{1}{\rho}||T||$.

(ii) : pour tout $\rho > 0$ on a $\dfrac{T}{w_\rho(T)} \in C_\rho$, son rayon spectral est alors inférieur à 1. Donc $r(T) \leq w_\rho(T)$. Par ailleurs, $w_\rho(T)$ est une fonction décroissante de ρ, ainsi $r(T) \leq \lim\limits_{\rho \to \infty} w_\rho(T)$, et cette limite fait sens.

Supposons $r(T) < 1$. On va montrer qu'il existe ρ assez grand pour avoir $T \in C_\rho$, soit $w_\rho(T) \leq 1$. Le noyau de Poisson est bien défini et continu sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ car $r(T) < 1$. Alors il existe $\exists M \in \mathbb{R}, \forall z \in \overline{\mathbb{D}} ||K_z(T)|| \leq M$, car $||K_\cdot(T)||$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ qui est compact. Soit $z \in \mathbb{D}$

$K_z(T) \geq -||K_z(T)||Id_H \geq -MId_H$. Soit $\rho \geq 1 + M$ on a

$$K_z(T) \geq (1-\rho)Id_H$$

donc $T \in C_\rho$

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Si $r(T) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, r(nT) = 0 < 1$. D'après ce qu'on a vient d'établir il existe $\rho > 0$ tel que $w_\rho(nT) \leq 1$, ou encore $w_\rho(T) \leq \frac{1}{n}$. Ainsi $\lim\limits_{\rho \to \infty} w_\rho(T) = 0$.

Si $r(T) > 0$, on prend $\varepsilon > 0$. $r(\frac{T}{(1+\varepsilon)r(T)}) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. D'après ce qu'on a vu $\exists \rho$, $w_\rho(\frac{T}{(1+\varepsilon)r(T)}) \leq 1$, donc $w_\rho(T) \leq (1+\varepsilon)r(T)$. Ainsi

$$\lim_{\rho \to \infty} w_\rho(T) = r(T)$$

$\square$

Proposition 31. $\bigcup\limits_{\rho \in \mathbb{R}_+^*} C_\rho$ est dense dans l'ensemble de opérateurs à puissances bornées.

Démonstration. Soit T à puissances bornées par M. $r(T) \leq \lim\limits_{n \to \infty} M^{\frac{1}{n}} \leq 1$.

Soit $s < 1$; alors $r(sT) < 1$. D'après la preuve du résultat précédent, on en déduit : $\exists \rho > 0 sT \in C_\rho$. $\lim\limits_{s \to 1} sT = T$ dans $\mathcal{B}(H)$, donc $\bigcup\limits_{\rho \in \mathbb{R}_+^*} C_\rho$ est dense dans l'ensemble des opérateurs à puissances bornées (au sens de la topologie de $\mathcal{B}(H)$). $\square$

4 Mesure spectrale d'une contraction

Dans cette partie on établit des résultats de théorie de la mesure et espaces $h^p(\mathbb{D})$, pour pouvoir construire une mesure spectrale μ^T d'une contraction. Cette mesure spectrale permet d'estimer le calcul fonctionnel des polynômes, de l'algèbre du disque, et sous certaines conditions, de définir un calcul fonctionnel de H^∞.

4.1 Représentation des espaces de Hardy $h^p(\mathbb{D})$

Définition. (i) Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in Har(\mathbb{D})$. On dira que $f \in h^p(\mathbb{D})$ si

$$||f||_p := \lim_{s \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(se^{i\theta})|^p d\theta < \infty$$

$h^p(\mathbb{D})$ est un espace de Banach muni de $||.||_p$.
(ii) Pour $p = +\infty$, soit $f \in Har(\mathbb{D})$. On définit :

$$f \in h^\infty(\mathbb{D}) \Leftrightarrow ||f||_\infty := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty$$

$h^\infty(\mathbb{D})$ est un espace de Banach pour $||.||_\infty$.
(iii) Soit $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ l'ensemble des mesures sur le cercle unité $\mathbb{T}$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Soit $||.||$ la norme :

$$||\mu|| = \sup\{\sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(A_n)|, A_n \subset \mathbb{T} \ mesurables, \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{T}\}$$

Elle munit $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ d'une structure d'espace de Banach.

Théorème 9. *Dualités :*
(i) si $p \neq 1$, $L^p(\mathbb{T}) = L^q(\mathbb{T})^*$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(ii) $L^1(\mathbb{T})$ n'est le dual d'aucun espace.
(iii) $\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}(T)^*$

Proposition 32. Soit $p \neq 1$; alors $L^p(\mathbb{T})$ est isométriquement isomorphe à $h^p(\mathbb{D})$, par l'application $f \in L^p(\mathbb{T}) \mapsto P_f \in h^p(\mathbb{D})$, avec :

$$P_f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) P_{re^{it}}(e^{i\theta}) d\theta$$

Démonstration. Pour prolonger une fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ au disque $\mathbb{D}$ de façon harmonique, on définit : $P_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) d\theta$; on vérifie que P_f est harmonique sur $\mathbb{D}$: $z \mapsto P_z(e^{i\theta})$ est harmonique pour tout θ et $|P_z(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})| = P_r(e^{i(\theta - t)}) |f(e^{i\theta})|$. Sur tout compact K de $\mathbb{D}$, on a une domination par $C_K |f(e^{i\theta})|$ (intégrable), où $C_K = \sup_{z \in K, \lambda \in \mathbb{T}} |P_z(\lambda)|$. Ainsi P_f est harmonique sur $\mathbb{D}$ d'après le théorème de convergence dominée. De plus grâce au principe du maximum on a $||P_f||_{h^p(\mathbb{D})} = ||f||_p$.

Réciproque : soit $u \in h^p(\mathbb{D})$; pour $r < 1$ on définit $f_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$.

Comme $p \neq 1$, $L^p(\mathbb{T}) = L^q(\mathbb{T})^*$. Donc $(f_r)_{r \in [0,1[}$ est une famille de formes linéaires, bornée par $||u||_{h^p(\mathbb{D})}$. Par compacité pour la topologie faible *, il existe une sous-suite $r_n \to 1$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$ tels que

$$\forall \varphi \in L^q(\mathbb{T}), \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f_{r_n}(e^{i\theta}) \varphi(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta}) \varphi(e^{i\theta}) d\theta$$

Et on définit ainsi f sur $\mathbb{T}$. Soit $z \in \mathbb{D}$. En particulier pour $\varphi = P_z \in L^q$ le noyau de Poisson, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f_{r_n}(e^{\mathrm{i}\theta}) P_z(e^{\mathrm{i}\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(e^{\mathrm{i}\theta}) P_z(e^{\mathrm{i}\theta}) d\theta$$

Comme $\forall z \in \mathbb{D}, \lim_{n\to\infty} f_{r_n}(z) = \lim_{n\to\infty} u(r_n z) = u(z)$ on a prouvé l'existence de $f \in L^p(\mathbb{T})$

$$\forall z \in \mathbb{D}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta}) P_z(e^{\mathrm{i}\theta}) = u(z)$$

Ainsi $u = P_f$ et la première étape permet de conclure. Il ne reste plus qu'à établir l'unicité de f. Mais d'après la première étape, $h \mapsto P_h$ est une isométrie, elle est injective. Donc f est l'unique fonction de L^p telle que $u = P_f$.

$\square$

Remarque. L'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{T})$ se représente comme $h^2(\mathbb{D})$. On peut alors définir sur $L^2(\mathbb{T})$ des opérateurs inspirés des fonctions harmoniques.

Par exemple pour $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe, on a $f \circ \varphi$ harmonique sur $\mathbb{D}$. Alors on peut définir l'opérateur de composition $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ sur $h^2(\mathbb{D})$ (peut être sous certaines conditions sur f).

On a vu que toute fonction de $h^p(\mathbb{D})$ se "prolonge" sur le tore en une fonction L^p. Ce résultat n'est pas vrai pour $p = 1$: les fonctions de $h^1(\mathbb{D})$ s'étendent au cercle unité en tant que mesures sur $\mathbb{T}$.

Théorème 10. $h_1(\mathbb{D})$ est isométriquement équivalent à $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ par l'application $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}) \mapsto P_\mu \in h^1(\mathbb{D})$, avec :

$$P_\mu(z) = \int_0^{2\pi} P_{re^{\mathrm{i}t}}(e^{\mathrm{i}\theta}) d\mu(e^{\mathrm{i}\theta})$$

Le théorème est admis. La preuve est proche de celle que l'on a vue précédemment, mais les arguments et espaces mis en jeu diffèrent.

Corollaire. Soit f harmonique sur $\mathbb{D}$ avec $\lim_{s\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(se^{\mathrm{i}\theta})| d\theta < \infty$;

Alors il existe une unique mesure μ_f sur $\mathbb{T}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \int_0^{2\pi} P_z(e^{\mathrm{i}\theta}) d\mu_f(e^{\mathrm{i}\theta})$$

4.2 Mesures de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$

On va faire un bref rappel sur les mesures, en particulier l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Définition. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. On note $|\mu| \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ la *variation totale de* μ, définie par

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum |\mu(A_n)|, \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A\}$$

D'après la définition de la norme sur $\mathcal{M}(\mathbb{T})$, on a donc $||\mu|| = |\mu|(X)$. Pour $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ on a $|\mu| = \mu$. En particulier $|\lambda| = \lambda$.

Remarque. $L^1(\mathbb{T}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{T})$. En effet, si $f \in L^1$ on peut lui associer la mesure $d\mu_f = f d\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue du tore. On a

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \int_{\mathbb{T}} \varphi d\mu_f = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{\mathrm{i}\theta}) f(e^{\mathrm{i}\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

L'application $f \mapsto \mu_f$ est une isométrie.

Définition. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ et A un sous ensemble mesurable de $\mathbb{T}$. A est $\mu-$*négligeable* si $|\mu|(A) = 0$.

On dit que μ est *absolument continue* (par rapport à la mesure de Lebesgue λ) si tout ensemble $\mu-$négligeable est $\lambda-$négligeable, c'est à dire

$$\forall A \text{ mesurable }, \lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$$

On dit que μ est $\sigma-$*singulière* par rapport à λ si il existe A mesurable, tel que $\lambda(A) = 0$ et pour tout $Y \subset \mathbb{T}$ mesurable, on a

$$\mu(Y) = \mu(Y \cap A)$$

En d'autres termes, toute la masse de μ est concentrée sur ensemble A qui est $\lambda-$négligeable.

Notation. On note $\mu << \lambda$ la relation : μ est absolument continue par rapport à λ. On note $\mu \perp \lambda$ si μ est $\sigma-$singulière par rapport à λ.

Exemple. Soit δ_1 la masse de Dirac en 1, définie par $\displaystyle\int \varphi d\delta_1 = \varphi(1)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. δ est $\sigma-$singulière. Elle a un atome en 1.

On peut construire des mesures sans atome qui sont $\sigma-$singulières, par exemple si la masse est portée par un ensemble de Cantor.

Proposition 33. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, avec $\mu << \lambda$. Alors il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ vérifiant $\mu = \mu_f$, soit $d\mu = f d\lambda$

Théorème 11. *de Radon-Nikodym*

(i) Soit μ une mesure sur $\mathbb{T}$ et λ la mesure de Lebesgue. Alors il existe un unique coupe de mesures $\nu, \rho \in \mathcal{M}(X)$, avec

$$\mu = \nu + \rho \quad , \quad \nu << \lambda \quad , \quad \rho \perp \lambda$$

(ii) Soit μ une mesure et ν sa partie absolument continue par rapport à λ. Alors $\exists! f \in L^1, \nu = \mu_f$, ou encore

$$d\nu = f d\lambda$$

On dit que f est la *dérivée au sens de Radon Nikodym* de μ par rapport à λ.

(iii) f est donnée par la limite radiale :

$$f(e^{\mathrm{i}t}) = \lim_{r \to 1} P_\mu(re^{\mathrm{i}t}) = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} P_{re^{\mathrm{i}t}}(e^{\mathrm{i}\theta}) d\mu(e^{\mathrm{i}\theta})$$

Pour $\lambda-$presque tout $t \in [0, 2\pi]$.

4.3 Noyau de Poisson et mesure spectrale

Lemme. Soit T une contraction et $z \in \mathbb{D}$. Alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)x|y) d\theta \leq ||x||.||y||$$

Démonstration. On va refaire le calcul de la preuve de l'inégalité de Von Neumann. Comme T est une contraction, $K_z(T) \geq 0$ pour tout z, et on considère la racine carrée positive K'_z de $K_z(T)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(K_{re^{i\theta}}(T)x|y)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(K'_{re^{i\theta}}x|K'_{re^{i\theta}}y)d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||K'_{re^{i\theta}}x||.||K'_{re^{i\theta}}y||d\theta \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||K'_{re^{i\theta}}x||^2 d\theta}.\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||K'_{re^{i\theta}}y||^2 d\theta} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(K_{re^{i\theta}}x|x)d\theta}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(K_{re^{i\theta}}y|y)d\theta} \leq ||x||.||y||
\end{aligned}$$

D'après la formule de Poisson : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{re^{i\theta}}d\theta = Id_H$. □

Proposition 34. Soit T une contraction et $K_z(T)$ son noyau de Poisson pour $|z| < 1$. Soient $x, y \in H$. Alors il existe une unique mesure $\mu^T_{x,y} \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, (K_z(T)x|y) = \int_0^{2\pi} P_z(e^{i\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{i\theta})d\theta$$

Définition. On a appelle μ^T la *mesure spectrale* de T.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $u : z \mapsto (K_z(T)x|y)$ est harmonique et que la famille $(\int_{r\mathbb{T}} |u(\xi)|d\xi)_{r<1}$ est bornée. Alors $u \in h^1(\mathbb{D})$ donc on peut représenter u par une mesure sur le tore qui réalise l'identité $u(z) = \int_0^{2\pi} P_z(e^{i\theta})d\mu\theta$, qu'on appelle alors $\mu^T_{x,y}$.

$\varphi(z) = \sum_{n\geq 1}(T^n x|y)z^n + \sum_{n\geq 1}(T^{*n}x|y) + (x|y)$. On peut déjà remarquer φ est harmonique sur $\mathbb{D}$ car elle est somme d'une fonction holomorphe et antiholomorphe. De plus, d'après le lemme précédent,

$$\forall r < 1, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(K_{re^{i\theta}}(T)x, y)|d\theta \leq ||x||.||y||$$

Alors on en déduit $\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0 2\pi|\varphi(re^{i\theta})|d\theta \leq ||x||.||y||$ ou encore $\varphi \in h^1(\mathbb{D})$.

Ainsi, d'après le théorème de représentation des fonctions de $h^1(\mathbb{D})$, on sait qu'il existe une unique mesure $\mu^T_{x,y} \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ qui réalise :

$$\forall z \in \mathbb{D}, (K_z(T)x|y) = \int_0^{2\pi} P_z(e^{i\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{i\theta})$$

□

Proposition 35. Soit T une contraction. Il existe une unique fonction $L^1(\mathbb{T})$ notée $x \overset{T}{\cdot} y$ avec

$$x \overset{T}{\cdot} y(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1}(K_{re^{i\theta}}(T)x|y)$$

pour $\lambda-$presque tout θ. De plus $x \overset{T}{\cdot} y$ est la dérivée de Radon Nikodym de $\mu^T_{x,y}$.

Démonstration. Soient $x, y \in H$. Il existe une mesure $\mu^T_{x,y}$ telle que $(K_z(T)x|y) = \int\limits_0^{2\pi} P_z(e^{\mathrm{i}\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}\theta})$ d'après le théorème précédent. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ la dérivée de Radon Nikodym de μ par rapport à λ. D'autre part, d'après le théorème de Radon Nikodym on peut exprimer f comme une limite radiale : pour $\lambda-$presque tout θ, on a

$$f(e^{\mathrm{i}\theta}) = \lim_{r\to 1} \int\limits_0^{2\pi} P_{re^{\mathrm{i}\theta}}(e^{\mathrm{i}t})d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}t}) = \lim_{r\to 1}(K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(T)x|y)$$

On note $f = x \overset{T}{\cdot} y$. L'unicité d'une telle fonction f est claire. □

Corollaire. On peut écrire $x \overset{T}{\cdot} y$ avec une limite radiale : pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x \overset{T}{\cdot} y(e^{\mathrm{i}t}) = \lim_{r\to 1} \int\limits_0^{2\pi} P_{re^{\mathrm{i}t}}(e^{\mathrm{i}\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}\theta})$$

Exemple. Soit $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| \leq 1$. Ainsi $T = \xi Id_H$ est une contraction. D'après la formule précédente,

$x \overset{T}{\cdot} y(e^{\mathrm{i}\theta}) = \lim\limits_{r\to 1}(K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(\xi Id_H)x|y) = \lim\limits_{r\to 1} P_{re^{\mathrm{i}\theta}}(\xi)(x|y)$

1^{er} *cas :* si $|\xi| < 1$, on a $P_{re^{\mathrm{i}\theta}}(\xi) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\overline{re^{\mathrm{i}\theta}}\xi)^{(n)} = P_{\overline{\xi}e^{\mathrm{i}\theta}}(r)$. Comme $P_{\overline{\xi}e^{\mathrm{i}\theta}}$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, on a $\lim\limits_{r\to 1}(K_{re^{\mathrm{i}\theta}}(\xi Id_H)x|y) = P_{\overline{\xi}e^{\mathrm{i}\theta}}(1)(x|y) = 2Re(\dfrac{1+\overline{\xi}e^{\mathrm{i}\theta}}{1-\overline{\xi}e^{\mathrm{i}\theta}})(x|y) = P_\xi(e^{\mathrm{i}\theta})(x|y)$, on peut aussi l'écrire :

$$x \overset{T}{\cdot} y = P_\xi(x|y)$$

Elle est intégrable car elle est continue. On va vérifier que dans ce cas, $d\mu^T_{x,y} = fd\lambda$: $\mu^T_{x,y}$ est absolument continue.

On a d'une part : $(K_z(T)x|y) = P_z(\xi)(x|y)$.

$\int\limits_0^{2\pi} P_z(e^{\mathrm{i}\theta})x \overset{T}{\cdot} y(e^{\mathrm{i}\theta})\dfrac{d\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_z(e^{\mathrm{i}\theta})P_\xi(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta(x|y)$; En appliquant la formule de Poisson (pour la fonction $f = P_z$, harmonique sur un voisinage de $\mathbb{D}$) on trouve $P_z(\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_z(e^{\mathrm{i}\theta})P_\xi(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta$. Cela signifie donc $(K_z(T)x|y) = \int\limits_{\mathbb{T}} P_z(\xi)\ x \overset{T}{\cdot} y(\xi)\ d\lambda(\xi)$. Donc $\mu^T_{x,y} \in L^1(\mathbb{T})$.

2^{eme} *cas :* si $|\xi| = 1$, on remarque $P_{re^{\mathrm{i}\theta}}(\xi) = \dfrac{1-r^2}{|re^{\mathrm{i}\theta}-\xi|^2}$. Ce terme admet une limite pour presque tout θ : si $e^{\mathrm{i}\theta} \neq \xi$, on a $P_{re^{\mathrm{i}\theta}}(\xi) = \dfrac{1-r^2}{|re^{\mathrm{i}\theta}-\xi|^2} \to 0$ lorsque $r \to 1$. Donc

$$x \overset{T}{\cdot} y = 0$$

On sait alors que $\mu^T_{x,y}$ est $\sigma-$singulière. On essaie au hasard : soit $\nu = \delta_\xi(x|y)$ la masse de Dirac en ξ pondérée par le produit scalaire (x, y).

$\int\limits_0^{2\pi} P_z(e^{\mathrm{i}\theta})d\nu(e^{\mathrm{i}\theta}) = P_z(\xi)(x|y) = (K_z(\xi Id_H)x|y)$. Donc ν est bien la mesure spectrale de ξId_H ;

$$\mu^T_{x,y} = \delta_\xi(x|y)$$

4.4 Contractions absolument continues et calcul fonctionnel de H^∞

Proposition 36. Soit T une contraction et $(\mu^T_{x,y})_{x,y\in H^2}$ sa mesure spectrale. Alors

$$\forall f \in A(\mathbb{D}), (f(T)x|y) = \int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}\theta})$$

Démonstration. Soit $f \in A(\mathbb{D})$. Il existe une suite de polynômes p_n qui converge uniformément vers f sur $\overline{\mathbb{D}}$; de plus $p_n(T)$ converge dans $\mathcal{B}(H)$ vers $f(T)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Avec la formule de Poisson, $p_n(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_n(e^{\mathrm{i}t})K_{re^{\mathrm{i}t}}(T)dt$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $f(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}t})K_{re^{\mathrm{i}t}}(T)dt$.

On a d'autre part $(K_{re^{\mathrm{i}t}}(T)x|y) = \int_0^{2\pi} P_{re^{\mathrm{i}t}}(e^{\mathrm{i}\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}\theta})$. On peut appliquer Fubini car les mesures sont finies :

$$\begin{aligned}
(f(rT)x|y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}t})(K_{re^{\mathrm{i}t}}(T)x|y)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}t})\int_0^{2\pi} P_{re^{\mathrm{i}t}}(e^{\mathrm{i}\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}\theta})dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}t})P_{re^{\mathrm{i}\theta}}(e^{\mathrm{i}t})dt\right)d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}\theta}) \text{ d'après Fubini et } P_{r\xi}(\lambda) = P_{r\lambda}(\xi) \\
&= \int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}\theta})
\end{aligned}$$

Si on définit $f_r(z) = f(rz)$, $f_r(T)$ converge vers $f(T)$ dans $\mathcal{B}(H)$ et f_r converge vers f dans $A(\mathbb{D})$. Donc on peut étendre la relation à $r = 1$: $(f(T)x|y) = \int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})d\mu^T_{x,y}(e^{\mathrm{i}\theta})$ □

Cela montre que μ^T est une mesure spectrale qui permet de définir le calcul fonctionnel de $A(\mathbb{D})$. En fait, cette formule s'étend aux fonctions de H^∞ pour une certaine classe de contractions.

Définition. Soit T une contraction et μ^T sa mesure spectrale ; on dit que T est *absolument continue* si pour tous $x, y \in H$, $\mu^T_{x,y}$ est absolument continue par rapport à λ. Ainsi pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$(K_z(T)x|y) = \int_0^{2\pi} P_z(e^{\mathrm{i}\theta})x \overset{T}{\cdot} y(e^{\mathrm{i}\theta})d\theta$$

Exemple. ξId_H est absolument continue si et seulement si $|\xi| < 1$.

Proposition 37. Si $||T|| < 1$, alors T est absolument continue.

Démonstration. □

Définition. Soit $H^\infty(\mathbb{D}) \subset h^\infty(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$.

$$A(\mathbb{D}) \subset H^\infty$$

Proposition 38. Soit T une contraction absolument continue. Alors

(i) Le morphisme d'algèbres $\Theta' : \begin{array}{ccc} A(\mathbb{D}) & \to & \mathcal{B}(H) \\ f & \mapsto & f(T) \end{array}$ du calcul fonctionnel de $A(\mathbb{D})$ se prolonge en un morphisme d'algèbres $\tilde{\Theta} : \begin{array}{ccc} H^\infty & \to & \mathcal{B}(H) \\ f & \mapsto & \tilde{\Theta}(f) = f(T) \end{array}$ en définissant

$$(f(T)x|y) := \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) x \stackrel{T}{\cdot} y(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

(ii) L'application $f \mapsto f(T)$ est continue au sens des topologies faibles * sur H^∞ et $\mathcal{B}(H)$.

$$f_n \to^{w*} f \Rightarrow f_n(T) \to^{w*} f(T)$$

Démonstration. (i) Soit $f \in H^\infty$. En particulier, $f \in h^\infty(\mathbb{D})$ et d'après le théorème de représentation des espaces $h^p(\mathbb{D})$, f peut être prolongée sur $\mathbb{T}$ en une fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$.

Pour tous $x, y \in H$, $\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) x \stackrel{T}{\cdot} y(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \leq ||f||_\infty ||x \stackrel{T}{\cdot} y||_1$. On peut donc définir $f \mapsto \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) x \stackrel{T}{\cdot} y(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$ existe d'après l'inégalité de Hölder car $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $x \stackrel{T}{\cdot} y \in L^1(\mathbb{T})$. Cette définition prolonge le calcul fonctionnel de $A(\mathbb{D})$ car la formule intégrale était valide pour $f \in A(\mathbb{D})$.

(ii) : soit $f_n \stackrel{w*}{\to} f$. Comme $L^1 \subset (H^\infty)^*$, on a alors pour tous $x, y \in H$,

$$f_n(T) = \int_0^{2\pi} f_n(e^{i\theta}) x \stackrel{T}{\cdot} y(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \xrightarrow{w*} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) x \stackrel{T}{\cdot} y(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = f(T)$$

Et ainsi le calcul fonctionnel est $w * -w*$ continu.

Il reste à montrer que cette application est un morphisme d'algèbres, la preuve figure dans "Sz-Nagy, Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert". □

On termine avec un critère suffisant pour qu'une contraction soit absolument continue.

Définition. Soit T une contraction. On dit que T est *complètement non unitaire* si T n'est unitaire sur aucun sous espace de H.

Théorème 12. Toute contraction $T \in \mathcal{B}(H)$ admet une décomposition unique de la forme $T = T_0 \oplus T_1$, où T_0 est unitaire et T_1 est complètement non unitaire.

Théorème 13. Soit T une contraction, T_0 sa partie unitaire et T_1 sa partie complètement non unitaire. Alors T est absolument continue si et seulement si la mesure spectrale μ^{T_0} de sa partie unitaire est absolument continue.

Corollaire. Toute contraction complètement non unitaire est absolument continue.

Références

[1] Sz-Nagy, Foias, Bercovici, Kérchy : *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, Springer*

[2] Sz-Nagy, Foias : *On certain classes of power-bounded operators in Hilbert space, Bolyai Institute, University of Szeged*

[3] Sz-Nagy : *Sur les contractions de l'espace de Hilbert, Bolyai Institute, University of Szeged*

[4] Isabelle Chalendar : *The operator-valued Poisson Kernel and its Applications, Irish Math. Soc. Bulletin (2003)*

[5] Isabelle Chalendar : *Modern approaches to the invariant-subspace problem, 2011*

[6] Foias : *On Harnack Parts of Contractions, Rev. Roum. Maths Tome 19, 1974*

[7] Ruben, Martinez-Avendaño, Rosenthal : *An Introduction to Operators on the Hardy Hilbert Space, Springer, 2007*