Fonctions holomorphes

Loïc Gaillard

29 avril 2014

Table des matières

1 Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une et une seule variable complexe ! 1
1.1 Intégration le long d'un chemin . . . 1
1.2 Intégrales nulles . . . 4
1.3 Formule de Cauchy . . . 6
1.4 Conséquences de la formule de Cauchy . . . 8
1.5 Classification des singularités . . . 11
1.6 Caractérisation des singularités . . . 13
1.7 Fonctions méromorphes . . . 15

2 Encore plus de fonctions holomorphes 17
2.1 Convergences . . . 17
2.2 Produits infinis . . . 18
2.3 Topologie de $\mathcal{H}(U)$ . . . 22
2.4 Approximations et simple connexité . . . 24
2.5 Bijections holomorphes 1.0 . . . 25
2.6 Bijections holomorphes 2.0 . . . 27
2.7 Théorème de Picard . . . 29

1 Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une et une seule variable complexe !

L'ambition de cette partie est d'établir la magie des fonctions holomorphes. On commencera par donner une preuve de la formule de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)dw}{w - z}$$

Et d'elle on déduira quelques théorèmes manifestant toute la régularité des fonctions holomorphes. Enfin, on établira une classification des singularités isolées et quelques résultats propres aux fonctions méromorphes.

Le lecteur ne manquera pas de remarquer tout ce que cette théorie doit à un certain Karl Weierstrass.

1.1 Intégration le long d'un chemin

Définition 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est *holomorphe* sur U si elle est $\mathbb{C}$-dérivable sur U. Autrement dit, $\forall z_0 \in U$, $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite notée $f'(z_0)$ quand $z \to z_0$.

Exemple. (i) $f_1 : z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet
$\forall z \in \mathbb{C}, \lim\limits_{h\to 0} \frac{z+h-z}{h} = 1$ donc f_1 est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathbb{C}$.

(ii) $f_n : z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\forall z \in \mathbb{C}, \lim\limits_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (nz^{n-1} + h \sum\limits_{k=2}^{n} h^{k-2} z^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!}) = nz^{n-1}$

(iii) On peut en déduire que les polynômes sont holomorphes.

(iv) Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge sur $D(0,R)$ vers f, alors f est holomorphe sur $D(0,R)$ (voir l'introduction des fonctions analytiques).

(v) $z \mapsto |z|$ n'est pas holomorphe :
$\frac{|z+h|-|z|}{h}$ n'admet pas de limite quand $h \to 0$ (le numérateur est un réel, l'argument du dénominateur dépend de h).

(vi) $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas holomorphe non plus :
$\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$ n'admet pas de limite pour les mêmes raisons.

On va en fait voir que les fonction holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ sont analytiques. Il existe plusieurs façons d'aborder la question. Nous allons faire cela avec la méthode de Goursat.

Définition 2. Soit f une fonction continue sur U ouvert et $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U. *L'intégrale* de f le long de γ est :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Proposition 1. Si δ et γ sont des chemins équivalents, $\int\limits_\delta f(z)dz = \int\limits_\gamma f(z)dz$

Démonstration. Si $\delta : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma : [c,d] \to \mathbb{C}$ sont équivalents, il existe $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme vérifiant $\delta = \gamma \circ \varphi$. Le théorème de changement de variable indique :
$\int\limits_\delta f(z)dz = \int\limits_a^b f(\gamma(\varphi(t)))\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))dt = \int\limits_c^d f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int\limits_\gamma f(z)dz$ □

Cela prouve que l'intégrale sur une courbe *géométrique* est bien définie.

Définition 3. Si K est un compact convexe de $\mathbb{C}$, on définit le lacet ∂K comme une paramétrisation injective de sa frontière, dans le sens direct. Dans le cas des cercles, des polygones, s'agit d'une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue.

On peut remarquer que cette courbe n'est pas toujours $\mathcal{C}^1$ par morceaux : les points de discontinuité de la dérivée peuvent être en nombre infini (à méditer).

Exemple. $K = \overline{D(0,R)}$, ∂K est paramétrée par
$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{2i\pi t} \end{array}$$
Si K' est le polygone $Conv(a_1, ..., a_n)$, $\partial K'$ est paramétrée par :
$\gamma(t) = (t-(i-1))a_{i+1} + (i-t)a_i$ sur $[i-1,i]$ avec $1 \leq i \leq n$.
On a donc noté $a_{n+1} = a_1$. Finalement cette paramétrisation est la jonction des des segments $[a_i, a_{i+1}]$. On la notera aussi $P(a_1, a_2, ..., a_n, a_1)$

Par la suite les chemins et lacets qu'on considèrera seront toujours $\mathcal{C}^1$ par morceaux pour donner un sens à cette définition de l'intégrale d'une fonction.

Définition 4. La *longueur* d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est

$$\mathbf{L}(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Proposition 2. Comme pour les intégrales réelles, $|\int\limits_{\gamma} f(w)dw| \leq \mathbf{L}(\gamma) \max\limits_{\Gamma} |f|$

Démonstration. $|\int\limits_{\gamma} f(w)dw| = |\int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt|$

$|\int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt| \leq \int\limits_{a}^{b} |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \int\limits_{a}^{b} \max\limits_{\Gamma} |f||\gamma'(t)|dt = \mathbf{L}(\gamma) \max\limits_{\Gamma} |f|$ □

Lemme. Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Alors U est connexe par arcs affines par morceaux.

Démonstration. Les ouverts connexes dans un espace métrique sont connexes par arcs, donc U est connexe par arcs.

Soient x'', y'' deux points de U, on choisit un arc γ reliant x'' à y''. Γ est compact inclus dans U, il est donc à distance non nulle de $\mathbb{C} \setminus U$. Soit δ la moitié de distance de Γ à $\mathbb{C} \setminus U$. Comme Γ est a fortiori pré-compact on peut le recouvrir d'un nombre fini de boules de rayon δ :

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta) \subset U$$

On peut maintenant choisir l'arc comme jonction des segments :

$$[x'', x_1], ([x_i, x_{i+1}])_{1 \leq i \leq m-1}, [x_m, y'']$$

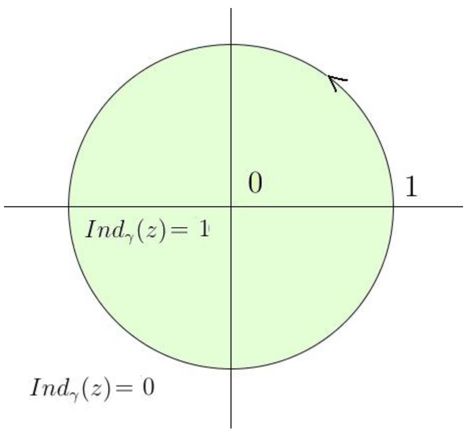
□

Définition 5. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ lacet sur U. Soit $z \in U \setminus \Gamma$. L'indice de z dans γ noté $Ind_\gamma(z)$ est défini par :

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\text{i}\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

Proposition 3. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{\text{i}t}$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1 \Rightarrow Ind_\gamma(z) = 0$, et $|z| < 1 \Rightarrow Ind_\gamma(z) = 1$.



Démonstration. Soit $z \in D(0,1)$. Si $z = 0$ on a le résultat. En effet :

$\frac{1}{2\text{i}\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\text{i}e^{\text{i}t}dt}{e^{\text{i}t}} = \frac{1}{2\text{i}\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \text{i}dt = 1.$

Si $z \neq 0$, soit $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $g(s) = \frac{1}{2\text{i}\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\text{i}e^{\text{i}t}dt}{e^{\text{i}t} - sz}$.

g est dérivable sur $[0,1]$, $g(0)=1$, $g(1)=Ind_\gamma(z)$. On va montrer que g' est nulle sur $[0,1]$ et on aura ainsi $g(1)=1$ car $[0,1]$ est connexe, donc le résultat voulu.

$g'(s) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}dt}{e^{\mathrm{i}t}-sz}$ par convergence dominée. Donc :

$g'(s) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}ze^{\mathrm{i}t}dt}{(e^{\mathrm{i}t}-sz)^2} = \frac{-z}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{e^{\mathrm{i}t}-sz})dt = \frac{-z}{2\mathrm{i}\pi}(\frac{1}{1-sz}-\frac{1}{1-sz}) = 0.$ □

1.2 Intégrales nulles

Proposition 4. Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout lacet γ tracé dans U et toute fonction f holomorphe sur U,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(ii) Si f est holomorphe sur U, f admet une primitive holomorphe sur U.

Démonstration. On suppose (i). Alors l'intégrale de f le long d'un chemin ne dépend pas du chemin suivi :

Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin sur U, $\gamma(a)=z_0$, $\gamma(b)=z_1$

Soit δ un chemin défini sur [a,b] ayant les mêmes valeurs aux extrémités. Par la propiété (i) :

$\int_{\gamma-\delta} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \int_\delta f(z)dz = 0$

car $\gamma-\delta$ est un lacet de U. Donc l'intégrale ne dépend pas du chemin reliant z_0 et z_1. On raisonne sur chaque composante connexe de U. Soit $z_0 \in U$ et F définie sur la composante connexe de z_0 par

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

Ce qu'on a vu précédemment permet d'affirmer que F est une application par l'existence d'un chemin C^1 par morceaux reliant z_0 à z et l'indépendance du chemin suivi. F est continue et dérivable comme intégrale d'une fonction continue.

$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_z^{z+h} \frac{f(w)-f(z)}{h}dw\right| \leq \int_z^{z+h} |\frac{f(w)-f(z)}{h}|dw \leq \frac{h^2}{h} \max_{w\in[z,z+h]} |f'(w)|$

Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$$

Donc F est une primitive de f holomorphe sur la composante connexe de U contenant z_0, en raisonnant sur chaque composante connexe de U on prouve (ii).

On suppose maintenant (ii). Alors f admet une primitive F. Le théorème fondamental de l'intégration nous permet de dire :

$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ quand γ est un lacet. Ainsi $(i) \Leftrightarrow (ii)$. □

Maintenant on va prouver que ces propriétés sont vérifiées quand l'ouvert U est un disque. Cela permettra ensuite de le généraliser à tous les ouverts simplement connexes. Pour cela on va montrer que l'intégrale sur le bord des triangles de U est nulle.

Définition 6. On note $P(a_1,...,a_n)$ le chemin polygonal reliant $a_1,..,a_n$ dans $\mathbb{C}$. Donc $P(a,b,c,a)$ est la frontière du triangle $Conv(a,b,c)$.

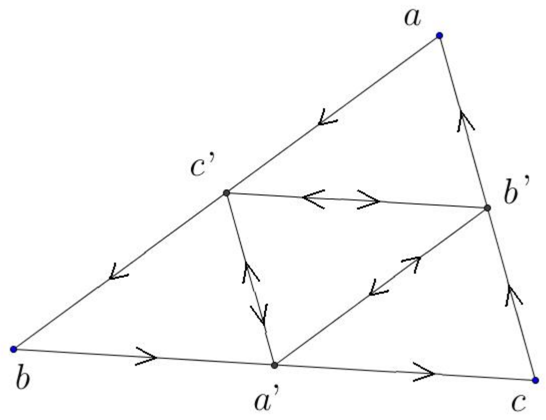
Théorème 1. de Goursat

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $P(a,b,c,a)$ un triangle (fermé, convexe) inclus dans U. Alors $\int_{P(a,b,c,a)} f(w)dw = 0$ pour toute fonction f holomorphe sur U.

Démonstration. On commence par le cas où a, b, c sont alignés : on dit que $b \in [a, c]$ quitte à inverser (par une permutation circulaire) l'ordre des points :

$\int\limits_{P(a,b,c,a)} f(w)dw = \int\limits_{[a,c]} f(w)dw - \int\limits_{[a,c]} f(w)dw = 0$ par Chasles.

Si a, b, c ne sont pas alignés, on découpe le triangle $Conv(a, b, c)$ en quatre plus petits triangles : a' est le milieu de $[b, c]$, b' le milieu de $[a, c]$, c' le milieu de $[a, b]$. Les 4 petits triangles sont des homothéties de $Conv(a, b, c, a)$ de rapports $\pm\frac{1}{2}$.



Comme le montre la figure,

$$\int\limits_{P(a,b,c,a)} f(w)dw = \int\limits_{P_1} f(w)dw + \int\limits_{P_2} f(w)dw + \int\limits_{P_3} f(w)dw + \int\limits_{P_4} f(w)dw$$

$P_1 = P(a, c', b', a), P_2 = P(a', b', c', a'), P_3 = P(b, a', c', b), P_4 = P(c, b', a', c)$.

Par l'absurde : on suppose $|\int\limits_{P(a,b,c,a)} f(w)dw| = \alpha > 0$ Parmi les 4 intégrales, on choisit celle de module maximal, sommée sur P_i. Par l'inégalité triangulaire $|\int\limits_{P_i} f(w)dw| \geq \frac{\alpha}{4}$. On appelle a_1, b_1, c_1 les sommets de P_i. Alors on peut itérer le raisonnement et construire trois suites de sommets $(a_n), (b_n), (c_n)$ vérifiant :

$$(1) \quad \left| \int_{P(a_n,b_n,c_n,a_n)} f(w)dw \right| \geq \frac{\alpha}{4^n}$$

On considère maintenant la suite de triangles $Conv(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une suite décroissante de fermés de $\mathbb{C}$ dont le diamètre tend vers 0. Comme $\mathbb{C}$ est complet, leur intersection est donc un point x. Comme f est dérivable en x on a : $f(w) = f(x) + (w - x)f'(x) + o(w - x)$. Donc :

$\int_{P(a_n,b_n,c_n,a_n)} f(w)dw = \int_{P(a_n,b_n,c_n,a_n)}(f(x) + (w - x)f'(x) + o(w - x))dw = \int_{P(a_n,b_n,c_n,a_n)}(f(x) + (w - x)f'(x))dw + \int_{P(a_n,b_n,c_n,a_n)} o(w - x)dw$

La première intégrale est nulle car la fonction affine $w \mapsto (f(x) + (w - x)f'(x))$ admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}$ (polynôme de degré 2) et $P(a_n, b_n, c_n, a_n)$ est un lacet de $\mathbb{C}$. Donc :

$$\int_{P(a_n,b_n,c_n,a_n)} f(w)dw = \int_{P(a_n,b_n,c_n,a_n)} o(w - x)dw$$

D'une part, $\mathbf{L}(P(a_n, b_n, c_n, a_n)) \leq (|a_n - b_n| + |b_n - c_n| + |a_n - c_n|) \leq \frac{\lambda}{2^n}$

D'autre part, sur $Conv(a_n, b_n, c_n)$, $|w - x| \leq \frac{\delta}{2^n}$ Donc

$$(2) \quad \left| \int_{P(a_n,b_n,c_n,a_n)} f(w)dw \right| = o(\frac{1}{4^n})$$

Cela contredit (1), donc $|\int_{P(a,b,c,a)} f(w)dw| = 0$. $\square$

1.3 Formule de Cauchy

Théorème 2. Soit $U = D(a, r)$. Alors toute fonction holomorphe sur U admet une primitive holomorphe sur U.

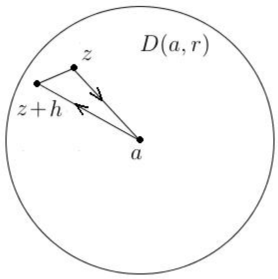
Démonstration. Soit f holomorphe sur U. On définit F par

$$F(z) = \int_0^1 f(a(1-t)+zt)(z-a)dt = \int_{[a,z]} f(w)dw$$

On doit montrer que F est holomorphe sur U et $F' = f$.

$F(z+h) - F(z) = \int_{[0,z+h]} f(w)dw - \int_{[0,z]} f(w)dw$

$= \int_P f(w)dw + \int_{[z,z+h]} f(w)dw$ où $P = P(0, z+h, z, 0)$.



D'après le théorème de Goursat, l'intégrale sur le triangle est nulle : U est convexe, le triangle est l'enveloppe convexe de trois points de U donc il est inclus dans U. Donc $F(z+h)-F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)dw$ et F définit bien une primitive holomorphe de f (voir une preuve quelques pages avant). $\square$

Finalement ce qu'on a utilisé ici est la convexité de $U = D(a, r)$. On en déduit donc immédiatement que l'intégrale d'une fonction holomorphe sur $D(a, r)$ est nulle sur tout lacet de $D(a, r)$.

Théorème 3. Soient γ_1 et γ_2 deux lacets homotopes tracés sur U. Soit f holomorphe sur U. Alors $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$

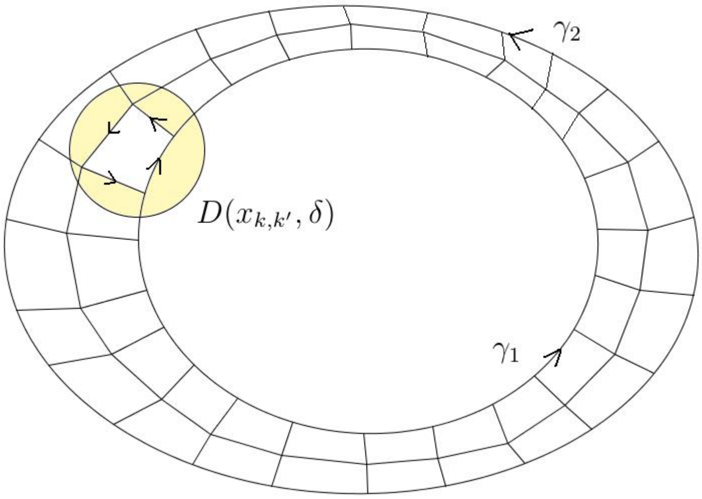
Démonstration. γ_1 et γ_2 étant homotopes on commence par considérer l'application $\varphi : [a, b] \times [0, 1]$ qui envoie γ_1 vers γ_2.

Soit $\delta = \frac{1}{2} d(\varphi([a, b] \times [0, 1]), \mathbb{C} \setminus U)$ si $U \neq \mathbb{C}$ et $\delta = 1$ si $U = \mathbb{C}$. $\delta \neq 0$ car $\varphi([a, b] \times [0, 1])$ est compact donc fermé, et inclus dans U. De plus, vu le choix qu'on a fait de δ chaque boule centrée sur un point de $\varphi([a, b] \times [0, 1])$ de rayon δ est dans incluse dans U. Par continuité uniforme de φ on peut choisir une subdivision de $[a, b] \times [0, 1]$ qui soit telle que l'image de chaque rectangle soit de diamètre inférieur à δ.

On note $a_0 < ... < a_p$ et $b_0 < ... < b_q$ les subdivisions respectives de [a,b] et [0,1] vérifiant ces propriétés. On a donc : $\forall k < p, k' < q,\ \exists\ x_{k,k'},\ \varphi([a_k, a_{k+1}] \times [b_{k'}, b_{k'+1}]) \subset D(x_{k,k'}, \delta)$

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \sum_{k'=1}^{q} A_{k,k'}$$

et $A_{k,k'}$ est l'intégrale de f sur le contour de la figure image du petit rectangle de la subdivision correspondant. Chaque $A_{k,k'}$ est nul car c'est l'intégrale de f sur un lacet, f est holomorphe sur $D(x_{k,k'}, \delta)$



et le lacet est tracé dans cette même boule. D'après ce qu'on a vu pour les disques, cette intégrale est nulle. Donc

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

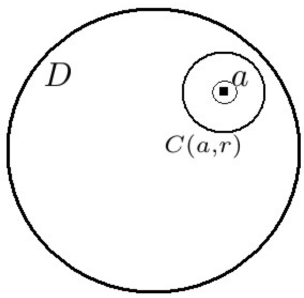
□

Corollaire. Si f est holomorphe sur U et γ est un lacet homotope dans U à un point, alors $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$

Proposition 5. Soit U ouvert, $a \in U$, f continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. Alors pour tout disque D, $\overline{D} \subset U \Rightarrow \int_{\partial D} f(z)dz = 0$

Démonstration. Si $a \notin D$, alors ∂D est homotope dans D à un point de D. f est holomorphe sur D. Donc $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Si $a \in D$: il existe un cercle $C(a,r)$ inclus dans D de centre a. Celui ci est homotope à ∂D dans $D \setminus Conv(C)$. f est holomorphe sur un voisinage de cet ensemble. Ainsi $\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{C(a,r)} f(z)dz$. Donc on se ramène à montrer que l'intégrale est nulle sur $C(a,r)$. Pour tout r' vérifiant $0 < r' \leq r$, le lacet



$C(a,r')$ est homotope au lacet $C(a,r)$. De plus f est holomorphe sur un voisinage de $D(a,r) \setminus \overline{D(a,r')}$. Ainsi

$$\forall r', 0 < r' < r \Rightarrow \int_{\partial D} f(z)dz = \int_{C(a,r')} f(z)dz$$

$|\int\limits_{C(a,r')} f(z)dz| \leq \int\limits_{C(a,r')} |f(z)dz| \leq 2\pi r' \sup\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)|$.

Le sup est borné car f est continue sur $\overline{D}$ compact. Donc cette quantité tend vers 0 quand r' tend vers 0. Ainsi $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$. □

Théorème 4. Soit f holomorphe sur U ouvert *simplement connexe*, $a \in U$ et $\overline{D(a,r)} \subset U$. Alors pour tout $z \in D(a,r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Démonstration. Soit $g : U \times U \to \mathbb{C}$ définie par $g(z,w) = \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}$ si $z \neq w$ et $g(x,x) = f'(x)$.

On fixe z. $w \mapsto g(z,w)$ est continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. Donc d'après la propriété qui précède, $\int\limits_{C(a,r)} g(z,w)dw = 0$.

On en déduit : $\int\limits_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(z)}{w-z}$. Le terme de droite vaut $2i\pi f(z)$; en effet, l'indice de z dans $C(a,r)$ est 1 car $z \in D(a,r)$. Donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

□

1.4 Conséquences de la formule de Cauchy

Théorème 5. Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U, alors f est analytique sur U. De plus, si $a \in U$ et $\delta = d(a, U^c)$, alors f est égale à sa série de Taylor sur $D(a,\delta)$.

Démonstration. Soit $a \in U$, δ comme défini dans l'énoncé. Soit $r < \delta$. La formule de Cauchy sur $\partial D(a,r)$ s'écrit : pour tout $z \in D(a,r)$,

$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$

$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-a)-(z-a)} = \frac{f(w)}{w-a} \dfrac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$.

Comme $|\frac{z-a}{w-a}| < 1$, $\dfrac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{z-a}{w-a})^k$.

Donc $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C(a,r)} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w-a} (\frac{z-a}{w-a})^k dw$ La somme converge normalement sur $C(a,r)$ car c'est un compact du disque de convergence de la série géométrique. Donc

$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} (z-a)^k dw$. Ainsi

$$\forall z \in D(a,r), f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw$$

Donc f est analytique au voisinage de a. □

Corollaire. Si f est holomorphe alors elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur U. La dérivée k-ième au point a est donnée par

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2i\pi} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw$$

Remarque. La formule de Cauchy reste vraie dans tout ouvert U simplement connexe sous la seule condition $C(a,r) \subset U$ (au lieu de $\overline{D(a,r)} \subset U$). De plus elle est vraie pour tout lacet homotope à $C(a,r)$ dans $U \setminus \{a\}$. Pour la généraliser à tout lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux il faut ajouter la notion d'indice du lacet.

Proposition 6. Soit U ouvert simplement connexe, γ un lacet tracé dans U, f holomorphe sur U. Alors pour tout $z \notin \Gamma$,

$$f(z) Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Théorème 6. *de Morera :*
Soit f continue sur U telle que $\int_\gamma f(w)dw = 0$ pour tout lacet γ de U. Alors f est holomorphe sur U.

Démonstration. D'après ce qu'on a vu précédemment, f admet une primitive F holomorphe sur U définie en choisissant a dans la composante connexe de z, par $F(z) = \int_a^z f(w)dw$ (en reprenant la preuve on remarque que seule la continuité de f est utilisée). Alors F est $\mathcal{C}^\infty$ donc F' aussi, donc f aussi. Ainsi f est holomorphe. □

Théorème 7. *Principe des zéros isolés*
Si f est holomorphe non constante sur U connexe, l'ensemble de ses zéros est localement fini dans U.

Démonstration. Soit $a \in U$. f s'écrit comme une série entière au voisinage de a :
$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (z-a)^k$. On note l l'indice du premier entier non nul de sa série entière et $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+l}(z-a)^k$. Alors $f = (z-a)^l g$ et g ne s'annule pas sur une boule $D(a,r)$. Ainsi $f^{-1}(\{0\}) \cap D(a,r)$ est fini. Les zéros de f sont donc isolés dans U. □

Proposition 7. *inégalité de Cauchy :*
Soit f holomorphe sur U, $a \in U$, $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset U$. On note $M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|$. Alors $|a_k| \leq \dfrac{M(r)}{r^k}$

Démonstration. $|a_k| = |\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)dw}{(w-a)^{k+1}}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(a,r)} |\frac{f(w)dw}{(w-a)^{k+1}}|$
$|a_k| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \max_{|z-a|=r} |f(w)| \frac{1}{r^{k+1}} \leq \frac{M(r)}{r^k}$ □

Théorème 8. *de Liouville :* Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée, alors elle est constante.

Démonstration. $U = \mathbb{C}, a = 0$. L'inégalité de Cauchy donne $|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k}$. Cette inégalité est vraie pour tout r positif car $D(0,r) \subset \mathbb{C}$. De plus si M majore $|f|$ il majore aussi $M(r)$ pour tout r. Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}_+^*, |a_k| \leq \frac{M}{r^k}$. On fait tendre r vers l'infini et on obtient $\forall k \neq 0, a_k = 0$. Autrement dit $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a_0$ □

Théorème 9. *de d'Alembert-Gauss :*
Les polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ admettent des racines.

Démonstration. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant sans racine dans $\mathbb{C}$. La fonction $\varphi : z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$: $\varphi'(z) = -\frac{P'}{P^2}(z)$ est définie en tout point complexe. D'autre part elle est bornée sur $\mathbb{C}$: $\lim_{|z| \to \infty} |\frac{1}{P(z)}| = 0$ car P est non constant. Cela signifie que φ est bornée sur le complémentaire d'un compact. D'autre part elle est bornée sur le compact en question par continuité. Finalement φ est bornée sur $\mathbb{C}$ et elle est donc constante d'après le théorème de Liouville. Donc P est constant, ce qu'on avait supposé faux. Ainsi P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. □

Remarque. Il est probable que d'Alembert n'ait ni prouvé, ni conjecturé ce théorème, que beaucoup appellent d'ailleurs le "théorème de Gauss". On le notera comme ça afin d'éviter les confusions avec les (nombreux) autres théorèmes de Gauss.

Un petit dernier que je n'ai pas trouvé dans la littérature alors qu'il est assez immédiat :

Proposition 8. *de Gaillard.* Soit f holomorphe non constante sur $\mathbb{C}$.
Alors l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Supposons qu'aucun point d'un disque $D(a,r)$ de $\mathbb{C}$ n'est atteint par f. Alors la fonction $g = \frac{1}{f-a}$ est bornée par $\frac{1}{r}$ et entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$). Donc elle est constante par le théorème de Liouville, et il en suit que f est constante, ce qui contredit l'hypothèse. □

Proposition 9. *Principe du maximum :* Si f est holomorphe sur U connexe et $a \in U$ est un maximum local de $|f|$, alors f est constante.

Démonstration. On écrit f comme une série entière au voisinage de a. Il existe un rayon r suffisamment petit pour que $|f|$ soit inférieur à $|f(a)|$ sur $\overline{D(a,r)} \setminus \{a\}$. On a alors $\forall r' < r$:
$|f(a)| = |\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C(a,r')} \frac{f(w)dw}{w-a}| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C(a,r')} |\frac{f(w)dw}{r'}| \leq \frac{2\pi r'}{2\pi}|f(a)|\frac{1}{r'} = |f(a)|$.

On en déduit vite que $|f(w)| = |f(a)|$ pour tout $w \in D(a,r)$. $|f|$ constant sur $D(a,r)$ donc f est constante sur $D(a,r)$ (voir dans la partie "équations de Cauchy-Riemann"). Donc $f' = 0$ sur un ouvert de U, ainsi f' est nulle sur U par le principe du prolongement analytique et f est constante. □

Corollaire. $M(r) = \max\limits_{|z-a|\leq r} |f(z)|$

Plus généralement le maximum (en module) d'une fonction holomorphe sur un compact est toujours atteint sur sa frontière.

Corollaire. Si $|f|$ admet un minimum local, ce minimum est 0.

Proposition 10. Soit f une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur U simplement connexe. Alors f admet des logarithmes et des racines n-ièmes holomorphes sur U

(i) $\exists g$ holomorphe sur U, $exp(g) = f$

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists g_k$ holomorphe sur U, $g_k^k = f$

Démonstration. (i) f ne s'annule pas sur U. Donc $\frac{f'}{f}$ est holomorphe sur U. Elle admet une primitive holomorphe g_0 car U est simplement connexe.
$\frac{\partial(exp(-g_0)f)}{\partial z} = exp(-g_0)(-g_0'f + f') = exp(-g_0)(-f' + f') = 0$. Donc $exp(g_0) = Kf$ où K est une constante.

Il suffit de choisir $K = \frac{exp(g_0(z_0))}{f(z_0)}$ puis $g = g_0 - ln(K)$. Alors g est un logarithme de f.

(ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, g logarithme de f et $g_k = exp(\frac{g}{k})$. Alors $g_k^k = f$. □

Remarque. - Dans la preuve de (i) on prend $ln(K)$. Le sens à donner à cette notation est "un des nombres complexes dont l'exponentielle vaut K". Cela indique aussi que ce logarithme de f est défini à $2i\pi$ près.

- De manière plus algébrique, on remarque que les monômes T^k vues comme des applications dans $\mathcal{H}(U)$ sont *surjectifs*, donc pour tout k. La question naturelle que cela appelle : les polynômes sont-ils surjectifs ? est-ce que $\mathcal{M}(U)$ est algébriquement clos quand U est simplement connexe ?

Dans la suite, on constatera combien l'hypothèse de *simple connexité* est indispensable : lorsque la fonction est holomorphe sur U et que U a un "trou", son intégrale n'est pas nulle : c'est la somme des résidus de f.

1.5 Classification des singularités

On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

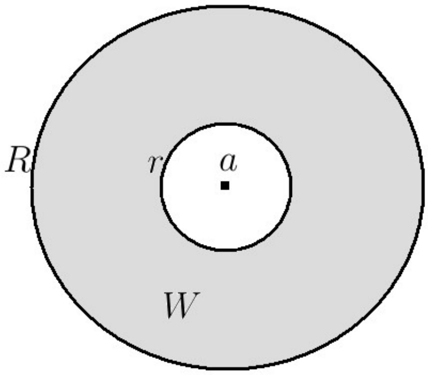
Définition 7. La *série de Laurent* associée à $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $a \in \mathbb{C}$ est l'expression

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$$

La série de Laurent converge en z si l'expression ci dessus est sommable. On appelle f la *fonction somme* de la série de Laurent, définie sur les $z \in \mathbb{C}$ où elle converge.

Proposition 11. Soit $r = inf(\{t \in \mathbb{R}^+, \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \text{ est borné}\})$, $R = sup(\{t \in \mathbb{R}^+, \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \text{ est borné}\})$, soit $W = \{z \in \mathbb{C}, r < |z-a| < R\}$.

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ converge normalement sur tout compact de W et la fonction somme f est holomorphe sur W.



Démonstration. Soit $r < \rho \leq \rho' < R$ et K le compact $\{z, \mid z-a \mid \in [\rho, \rho']\}$.

Il suffit de prouver la convergence normale sur ces compacts. On décompose la série en deux séries entières : une en $z-a$ et une en $\frac{1}{z-a}$. $\mid z-a \mid \leq \rho' < R$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-a)^n$ converge normalement sur le disque fermé.

$\mid z-a \mid \geq \rho > r$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{-n}(z-a)^{-n}$ converge normalement sur le complémentaire du disque ouvert. La fonction somme étant l'addition de ces deux quantités, elle converge normalement sur l'intersection, donc sur le compact $\{z, \mid z-a \mid \in [\rho, \rho']\}$. □

On s'intéresse maintenant au cas où $r = 0$: on considère une fonction f définie et holomorphe sur un disque épointé et on veut l'étudier sur la couronne à l'aide d'une série de Laurent. Ce résultat est vrai pour une fonction holomorphe sur $D(a, R) \setminus D(a, r)$ mais on ne s'en servira pas sous cette forme, on présente donc une propriété moins générale.

Définition 8. Soit f définie par une série de Laurent en a sur le disque épointé $D^*(a, R)$ avec $R > 0$. Le *résidu* de f en a est a_{-1} où $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$

Théorème 10. des résidus provisoire.

Soit f définie par une série de Laurent centrée en a sur un disque épointé $D^*(a, R)$. $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$. Soit $0 < r < R$. Alors

$$\int_{\mathcal{C}(a,r)} f(z)dz = 2i\pi a_{-1}$$

On note $Res(f, a)$ le résidu de f en a.

Démonstration. $\int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} f(z)dz = \int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$. On peut inverser la somme et l'intégrale car $\mathcal{C}(a,r)$ est compact de $D^*(a,R)$ et la somme de la fonction f converge normalement, donc uniformément sur ce disque épointé (propriété précédente).

$$\int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} f(z)dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} a_n(z-a)^n$$

Pour tout entier n différent de -1, cette intégrale est nulle car $(z-a)^n$ admet $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ pour primitive holomorphe sur $D^*(a,R)$.

Donc $\int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} f(z)dz = \int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{a_{-1}dz}{z-a} = 2\mathrm{i}\pi a_{-1}$ □

Proposition 12. Soit f holomorphe sur $D(a,R)\setminus\{a\}$.

Alors f admet un unique développement de Laurent en a.

Démonstration. Existence :

Soit $a_{n,r}$ définie par $a_{n,r} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$. On remarque que les $\mathcal{C}(a,r)$ sont tous homotopes (par homothétie de centre a) pour $r \in]0,R[$ donc l'intégrale est indépendante de r. On appelle donc

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$$

Soit $w \in D(a,R)\setminus\{a\}$, on prend $r_1 > 0$ et $r_2 < R$ tels que $w \in D(a,r_2)\setminus D(a,r_1)$. L'indice de w dans le lacet $\mathcal{C}(a,r_2) - \mathcal{C}(a,r_1)$ est 1. Par la formule de Cauchy on a donc :

$$2\mathrm{i}\pi f(w) = \int\limits_{\mathcal{C}(a,r_2)} \frac{f(z)dz}{z-w} - \int\limits_{\mathcal{C}(a,r_1)} \frac{f(z)dz}{z-w}$$

$\frac{f(z)}{z-w} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}} f(z)$. Si on intègre cette expression sur $\mathcal{C}(a,r_2)$ compact, la convergence normale permet d'inverser les opérateurs somme et intégrale. On obtient alors

$$\int\limits_{\mathcal{C}(a,r_2)} \frac{f(z)dz}{(z-w)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(w-a)^k$$

$-\frac{f(z)}{z-w} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}} f(z)$. En intégrant cette expression sur $\mathcal{C}(a,r_1)$ on obtient

$$\int\limits_{\mathcal{C}(a,r_1)} \frac{-f(z)dz}{(z-w)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k-1}(w-a)^{-k-1}$$

Ainsi f s'écrit comme une série de Laurent : $f(w) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k(w-a)^k$

Unicité : Si $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-a)^n$ sur un disque épointé centré en a, alors a_n est le résidu de $\frac{f}{(z-a)^{n+1}}$ en a donc par le théorème des résidus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int\limits_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$ □

Définition 9. Soit f une fonction holomorphe sur $D(a,R)\setminus\{a\}$ qu'on note $D^*(a,R)$. On dit alors que a est une *singularité* de f. Trois cas se produisent :

(i) La série de Laurent en a est de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$

On dit que a est une *singularité illusoire.*

(ii) La série est : $\sum\limits_{n=-m}^{\infty} a_n(z-a)^n$ et $a_{-m} \neq 0$

On dit que a est un *pôle d'ordre m.*

(iii) La série est : $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$

On dit que a est une *singularité essentielle* de f.

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$. f est une fonction *méromorphe* sur U s'il existe un ensemble localement fini dans U noté S (l'ensemble des singularités de f) tel que f soit holomorphe sur $U \setminus S$ et aucun point de S n'est une singularité essentielle de f.

Exemple. - La fraction rationnelle $z \mapsto \frac{z^2+1}{z-\mathfrak{i}}$ admet une singularité en $\mathfrak{i}$. Mais comme $z^2+1 = (z-\mathfrak{i})(z+\mathfrak{i})$, cette fraction rationnelle coïncide avec $g : z \mapsto z+\mathfrak{i}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{i}\}$. Donc la singularité en $\mathfrak{i}$ est illusoire et g est le prolongement holomorphe de la fonction au voisinage de $\mathfrak{i}$.

- La fonction ζ de Riemann admet un pôle d'ordre 1 et de résidu 1 en 1 (sans démonstration). Donc la fonction $h : s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{1-s}$ a un développement de Laurent en 1 dont tous les termes sont positifs. Elle a donc une singularité illusoire en 1 et ainsi un prolongement holomorphe sur un voisinage de 1.

1.6 Caractérisation des singularités

Proposition 13. Soit f holomorphe sur $D^*(a,R)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) a est une singularité illusoire de f

(ii) f admet un prolongement holomorphe en a

(iii) f est bornée sur un voisinage épointé de a

Démonstration. $(i) \Rightarrow$ Cette série de Laurent est en fait une série entière, on définit $F = f$ sur le disque épointé, $F(a) = a_0$, il s'agit d'un prolongement holomorphe de f sur $D(a,R)$.

$(ii) \Rightarrow$ F est holomorphe au voisinage de a donc continue. Elle est donc bornée sur un voisinage de a.

$(iii) \Rightarrow$ $(z-a)^2 f$ est nulle en a, de dérivée nulle en a et holomorphe sur $D^*(a,R)$. Elle est donc continue et dérivable sur $D(a,r)$. On sait que f admet une série de Laurent centrée en a : $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$.

De plus $(z-a)^2 f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^{n+2}$ est holomorphe. Elle admet donc un unique développement en série entière en a. Il coïncide avec le développement de Laurent par définition des coefficients a_n. Ainsi pour tout $n < 2$, $a_n = 0$. Comme $(z-a)^2 f$ est nulle et de dérivée nulle en a on a même : pour tout $n < 0$, $a_n = 0$. Donc a est une singularité illusoire de f. □

Proposition 14. Soit f holomorphe sur $D^*(a,R)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) a est un pôle d'ordre m de f

(ii) $(z-a)^m f$ admet un prolongement holomorphe non nul en a

(iii) $(z-a)^m f$ est bornée sur un voisinage épointé de a et $\lim\limits_{z\to a} |(z-a)^{m-1} f(z)| = +\infty$

Démonstration. $(i) \Rightarrow$ $(z-a)^m f$ admet une singularité illusoire en a, et son prolongement holomorphe vaut $a_{-m} \neq 0$ en a, donc non nul en a.

$(ii) \Rightarrow$ $(z-a)^m f$ admet F comme prolongement holomorphe. F est bornée sur un voisinage épointé de a. $\lim\limits_{z\to a} \frac{F(z)}{z-a} = F(a) \lim\limits_{z\to a} \frac{1}{z-a} = +\infty$

Supposons (iii), alors $(z-a)^m f$ admet une singularité illusoire en a d'après la proposition précédente. La série de Laurent de f en a est :

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

Si a_{-m} était nul, $\frac{f}{(z-a)^{m-1}}$ aurait une singularité illusoire en a et serait donc bornée dans un voisinage de a, ce qui est supposé faux dans la condition (iii). Donc f admet un pôle d'ordre m en a. $\square$

Exemple. On a ici représenté deux fractions rationnelles avec leurs lignes de niveau : à gauche la fraction admet un zéro d'ordre 1 et un pôle d'ordre 2 ; à droite elle admet un pôle d'ordre 1 et un pôle d'ordre 3.

La propriété des pôles se traduit par le fait que les lignes de grand module entourent les pôles "à partir d'un certain rang". Ce n'est pas le cas pour une singularité essentielle. Dans la deuxième illustration on remarque que le module croît plus rapidement pour un pôle d'ordre supérieur.

Le théorème de Weierstrass concerne les singularités essentielles et décrit le comportement de la fonction au voisinage d'une telle singularité.

Théorème 11. *de Weierstrass !* :

Soit a singularité essentielle de f holomorphe sur $D^*(a,R)$ et $0 < r < R$

$$f(D^*(a,r)) \text{ est dense dans } \mathbb{C}$$

Démonstration. Supposons qu'existent $r \in]0,R[$ et $B(x,\epsilon)$ une boule disjointe avec l'image par f de $D^*(a,r)$. Alors soit g définie sur $D^*(a,r)$ par :

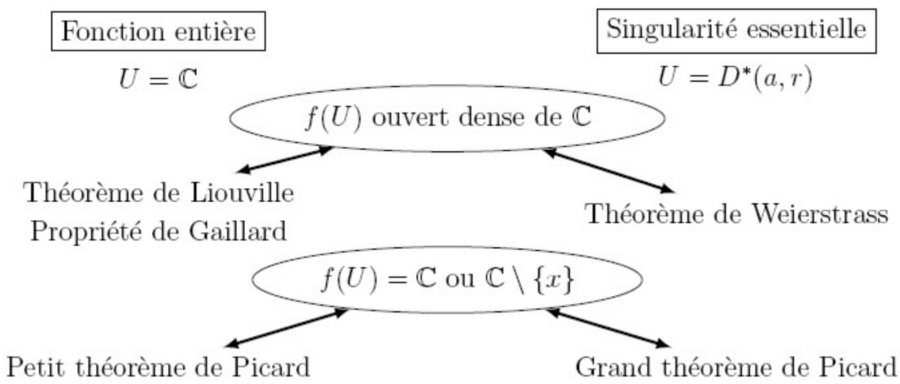
$$g(z) = \frac{1}{f(z)-x}$$

g est holomorphe sur ce disque épointé et admet une singularité en a. Mais g est bornée en module par $\frac{1}{\epsilon}$, la singularité en a est donc illusoire (propositions précédentes). Donc g admet un prolongement holomorphe sur $D(a,r)$. On remarque que a est le seul point où g peut s'annuler sur $D(a,r)$. Soit m l'ordre d'annulation de g en a.

$g(z) = (z-a)^m h(z)$ où h ne s'annule pas sur $D(a,r)$ donc elle admet un inverse holomorphe sur $D(a,r)$. Ainsi :

$$f(z) = x + \frac{1}{g(z)} = x + \frac{1}{(z-a)^m h(z)} = \frac{x(z-a)^m + (h(z))^{-1}}{(z-a)^m}$$

Donc le pôle de f en a est d'ordre au plus m, ce qui contredit que f admet une singularité essentielle en a. Donc si f admet une singularité essentielle en a, l'image de toute boule épointée de a est dense dans $\mathbb{C}$ $\square$



Il est rapide de remarquer que cette propriété caractérise les singularités essentielles : si a est illusoire, l'image de $D^*(a,r)$ est bornée, si a est un pôle, l'image de $D^*(a,r)$ est d'inverse bornée (pour r assez grand). Dans les deux cas l'image n'est pas dense.

Nous avons prouvé que l'image de toute boule est dense et on peut voir par le théorème de l'application ouverte que celle ci est aussi ouverte. Les points évités par la fonction sur tout voisinage de a est un fermé d'intérieur vide de $\mathbb{C}$. Le théorème de Picard donne un résultat beaucoup plus précis, puisqu'il stipule qu'il existe au plus un point évité par f.

1.7 Fonctions méromorphes

Théorème 12. des résidus. Soit U ouvert simplement connexe et f holomorphe sur $U \setminus S$, où S est un ensemble localement fini de U. Soit γ un lacet tracé dans $U \setminus S$.

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in S} Res(f,a)Ind_\gamma(a)$$

Démonstration. Tout d'abord, montrons que cette somme a un sens :

γ est homotope dans U à un point z car U est simplement connexe. Appelons φ cette homotopie. $V = \varphi([a,b]\times[0,1])$ est un compact de U. Donc il n'y a qu'un nombre fini de points dans $V \cap S$. L'indice de γ pour les points n'appartenant pas à V est nul. Il est facile de s'en convaincre géométriquement mais je ne vais pas le justifier. Cela conclut que la somme énoncée plus haut a un nombre fini de termes donc est finie.

$\forall a \in U, f - \frac{Res(f,a)}{z-a}$ est holomorphe au voisinage de a. Donc $f - \sum\limits_{a\in S\cap V} \frac{Res(f,a)}{z-a}$ est holomorphe sur un voisinage de V.

$$\int_\gamma \left(f(z) - \sum_{a\in S\cap V} \frac{Res(f,a)}{z-a} \right) dz = 0$$

Et ainsi

$$\int_\gamma f(z) = \int_\gamma \sum_{a\in S\cap V} \frac{Res(f,a)}{z-a} dz = \sum_{a\in S\cap V} Res(f,a) 2i\pi Ind_\gamma(a)$$

La preuve de l'existence de la somme justifie que la somme sur $S\cap V$ est égale à la somme sur S. Donc

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in S} Res(f,a)Ind_\gamma(a)$$

□

Proposition 15. Soit f méromorphe non nulle sur U ouvert connexe. Alors pour tout compact $K \subset U$ il existe deux fonctions N et D holomorphes sur un voisinage de K vérifiant $f = \dfrac{N}{D}$.

Démonstration. Si f est une telle fonction, l'ensemble S de ses pôles est localement fini, donc fini dans K. On définit alors $D = \prod\limits_{p\in K\cap S} (z-p)^{m_p}$ qui est holomorphe non nulle sur un voisinage de $K \setminus S$. Sur ce même voisinage $N = Df$ n'a que des singularités illusoires. Elle est donc holomorphe. □

Remarque. Ceci est une propriété locale : on n'a pas prouvé que deux fonctions holomorphes sur U définissent le numérateur et le dénominateur de f. Cela s'avère vrai, mais c'est plus subtil à montrer.

Proposition 16. Soit U simplement connexe et f méromorphe sur U. On note S l'ensemble de ses pôles *et zéros* sur U. Soit γ un lacet simple de $U \setminus S$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f}(z)dz = Z - P$$

où Z est le nombre de zéros de f et P son nombre de pôles pour lesquels l'indice de γ est non nul.

Démonstration. Il suffit de voir que le résidu de $\frac{f'}{f}$ en un zéro a de f est la multiplicité de ce zéro. Avec la série entière de f on le voit car cette multiplicité m est le rang du premier terme non nul de la somme :

$\frac{f'}{f}(z) = \frac{\sum_{k=m}^{\infty} k a_k (z-a)^{k-1}}{\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-a)^k} = \frac{m}{z-a} + g(z)$ où g est holomorphe au voisinage de a donc de résidu nul en a. Donc $Res(\frac{f'}{f}, a) = m$ □

Définition 10. Soit f méromorphe sur U, $a \in U$. La *valuation* en a de f est l'ordre de multiplicité du zéro, ou l'opposé de l'ordre de multiplicité du pôle. On la note $v_a(f)$.

$f(z) = \sum\limits_{k=r}^{\infty} a_k(z-a)^k$ avec $a_r \neq 0$. Alors $v_a(f) = r$.

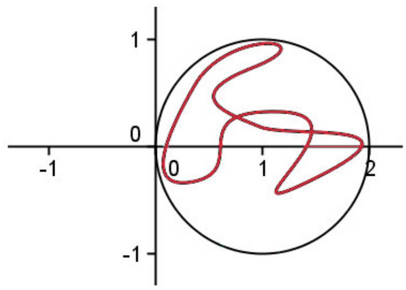
La propriété précédente s'exprime donc :

$$\int\limits_\gamma \frac{f'}{f}(w)dw = 2\mathrm{i}\pi \sum_{Ind_\gamma(p)=1} v_p(f)$$

Théorème 13. *de Rouché :*

Si f, g sont holomorphes et $|f-g| < |f|$ sur la trace d'un lacet injectif γ, alors f et g ont le même nombre de zéros dans l'ensemble U des z tels que $Ind_\gamma(z) \neq 0$.

Démonstration. Pour $z_0 \in \Gamma$, $f(z_0) \neq 0$, sinon l'inégalité stricte n'est pas vérifiée. Ainsi on peut diviser la relation par $|f(z)|$: soit $z \in \Gamma$, on note $h = \frac{g}{f}$, alors $|1-h(z)| < 1$.



Donc l'image de γ par h est incluse dans $D(1,1)$ et ne tourne donc pas autour de l'origine. Ainsi, $\int\limits_{h\circ\gamma} \frac{dw}{w} = \int\limits_\gamma \frac{h'}{h}(w)dw = 0$

D'autre part $\frac{h'}{h} = \frac{g'f-f'g}{f^2}\frac{f}{g} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$. Donc

$$\int\limits_\gamma \frac{f'}{f}(w)dw = \int\limits_\gamma \frac{g'}{g}(w)dw$$

D'après ce qu'on a vu précédemment, $\sum\limits_{Ind_\gamma(p=1)} v_p(f) = \sum\limits_{Ind_\gamma(p=1)} v_p(g)$ $\square$

Corollaire. Soit f holomorphe non constante sur U connexe, et $z_0 \in U$. On note k la valuation de $f - f(z_0)$ en z_0 ($k \geq 1$). Alors il existe un voisinage V_0 de z_0 et un voisinage W de $f(z_0)$ tels que $\forall \omega \in W$ l'équation $f(z) = \omega$ admet k solutions dans V_0.

Démonstration. On choisit r de sorte que $f - f(z_0)$ ne s'annule pas sur $\overline{D(z_0,r)}$. Soit $\varepsilon = \min\limits_{C(a,r)} |f - f(z_0)|$. Alors on prend : $V_0 = D(a,r)$ et $W = D(f(z_0), \varepsilon)$.

Si $\omega \in W$, $|(f-\omega) - (f - f(z_0))| < \varepsilon \leq |f - f(z_0)|$ sur $C(a,r)$. D'après le théorème de Rouché, $f - f(z_0)$ et $f - \omega$ ont autant de zéros dans $D(a,r)$. $f - f(z_0)$ en a k donc l'équation $f(z) = \omega$ admet k solutions dans V_0. $\square$

2 Encore plus de fonctions holomorphes

2.1 Convergences

On va parcourir rapidement la théorie des suites et séries de fonctions holomorphes, afin de pouvoir utiliser en particulier un théorème utile (celui de Weierstrass !).

Définition 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U. (u_n) *converge uniformément vers f sur les compacts de U* si pour tout $K \subset U$ compact, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in K} |u_n(z) - f(z)| = 0$.

u_n est *uniformément de Cauchy* sur K si $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{p,q\geq N} \sup\limits_{z\in K} |u_p(z) - u_q(z)| = 0$

Comme on ne connaît pas souvent la limite d'une suite de fonctions, il est commode d'utiliser le critère de Cauchy. On va prouver qu'il est valide avant toute chose.

Proposition 17. (u_n) converge uniformément sur K si et seulement si elle est uniformément de Cauchy sur K.

Démonstration. - On suppose que (u_n) converge uniformément vers $f : K \to \mathbb{C}$. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\sup\limits_{z\in K} |u_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On prend $p, q \geq N$. Alors $\forall z \in K, |u_p(z) - u_q(z)| \leq |u_p(z) - f(z)| + |u_q(z) - f(z)| < 2\varepsilon$. Donc (u_n) est uniformément de Cauchy.

- On va commencer par reconstruire f : si (u_n) est uniformément de Cauchy, en particulier $\forall z \in K$, $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme elle vit dans $\mathbb{C}$ qui est complet, elle admet une limite $f(z)$. On a donc l'unique candidat pour être la limite de u_n.

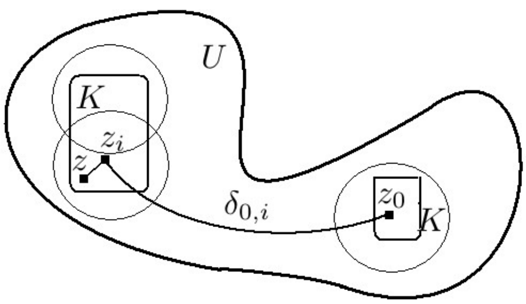
Soit $\delta > 0$, M un entier assez grand pour avoir $|u_p(z) - u_q(z)| < \delta$ pour tout $z \in K$, pour tous $p, q \geq M$. Soit $z \in K$, $|u_p(z) - f(z)| = \lim\limits_{q\to\infty} |u_p(z) - u_q(z)| \leq \delta$, pour tout $p \geq N$. Donc (u_p) converge uniformément vers f. □

Lemme. Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U connexe. On suppose $f_n \to f$ simplement sur U et f_n' converge uniformément vers g sur les compacts de U. Alors f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Démonstration. On commence par prouver que la convergence vers f est uniforme sur les compacts : soit K compact, $z \in K$, $z_0 \in K$. Soit γ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$

$|f_p(z) - f_p(z_0) - f_q(z) + f_q(z_0)| = |\int\limits_\gamma f_p'(u) - f_q'(u)du| \leq \mathbf{L}(\gamma) \sup_{u\in\Gamma} |f_p'(u) - f_q'(u)|$ d'après l'inégalité des accroissements finis.

La longueur de γ peut être bornée uniformément sur K : il suffit de choisir un chemin pas trop mauvais pour relier deux points. Une façon de faire ça par exemple : K est pré-compact, on peut le recouvrir avec un nombre fini de boules de rayon 1, qu'on note $U_i = B(z_i, 1)$, $z_0 \in U_0$. On choisit un chemin $\delta_{i,j}$ entre le centre de chacune des boules. Alors il existe un chemin γ entre z_0 et z : $\delta_{0,i} + [z_i, z]$. Sa longueur est majorée par $sup\mathbf{L}(\delta_{0,i}) + 1$.



Soit $\varepsilon > 0$. De l'inégalité qu'on avait, on déduit : $|f_p(z) - f_q(z)| \leq |f_p(z_0) - f_q(z_0)| + \mathbf{L}(\gamma) \sup\limits_{z\in K} |f_p'(z) - f_q'(z)|$. Comme f converge simplement en z_0, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |f_p(z_0) - f_q(z_0)| < \varepsilon$. Comme f_p' est uniformément de Cauchy sur $\Gamma \cup K$ on peut choisir N_2 avec $\forall p, q \geq N_2 |f'_p(z) - f'_q(z)|\mathbf{L}(\gamma) < \varepsilon$, puis finalement déduire que f_n est uniformément de Cauchy sur K. $\square$

Remarque. - La connexité de U sert à outrance dans cette preuve, mais elle n'est pas indispensable : on peut raisonner dans les composantes connexes de U car on prouve une propriété locale.

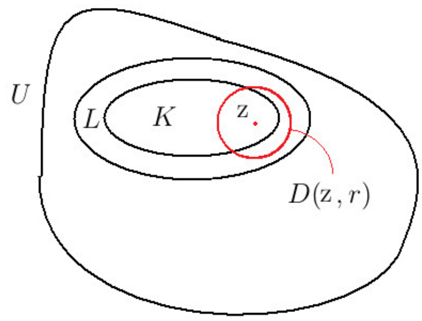
- On pourrait ne supposer sur f que la convergence simple en z_0 (en un seul point de U). Mais pour avoir cette même conclusion il faudrait alors s'assurer que U est connexe.

- Tout cela est assez laborieux, c'est pour cela que je ne peux pas entrer plus dans le détail. Il y aurait beaucoup d'arguments à ajouter pour être vraiment rigoureux, notamment pour toute la partie géométrique avec les chemins.

Théorème 14. *de Weierstrass !*

Soit f_n une suite de fonctions *holomorphes sur* U, convergeant uniformément sur tout compact de U vers f. Alors f est holomorphe sur U.

Démonstration. Soit f_n une suite de fonctions convergeant vers f uniformément. C'est une suite de Cauchy de $\mathcal{H}(U)$. Comme les termes de la suite sont des fonctions continues, la limite f continue. (c'est classique et plus général).



On va utiliser l'inégalité de Cauchy pour dire que la limite est aussi dérivable : soit $r = \frac{1}{2}d(K, U^c)$. On note $L = K + \overline{D(0,r)}$. L est compact (à méditer) inclus dans U. De plus pour tout z de K, $\overline{D(z,r)} \subset U$. Donc on peut appliquer la formule de Cauchy sur $C(z, r)$:

$f'_k(z) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C(z,r)} \frac{f_k(w)}{(w-z)^2} dw$ Par suite, $|(f'_p - f'_q)(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^2} ||f_p - f_q||_L$. Donc

$$||f'_p - f'_q||_K \leq \frac{1}{r} ||f_p - f_q||_L$$

Comme (f_n) est une suite de Cauchy, la norme L tend vers 0 aussi. Donc (f'_n) est uniformément de Cauchy sur K. Ainsi la limite f est holomorphe d'après notre lemme. $\square$

Remarque. On verra dans la suite que cela traduit la *complétude de* $\mathcal{H}(U)$. L'air de rien, ce théorème a une certaine profondeur : en bornant les valeurs de la dérivée on peut borner les valeurs de f, ça c'est bien connu, c'est l'inégalité des accroissements finis. Ici, on a montré que grâce à la (colossale !) formule de Cauchy on peut borner les valeurs de f' en connaissant une borne des valeurs de f. C'est ainsi qu'on a pu montrer l'uniforme convergence des f'_n. C'est pour ça que ce théorème sera faux pour des fonctions réelles et dans beaucoup d'autres contextes.

2.2 Produits infinis

À partir d'ici on va caractériser la convergence des produits infinis de fonctions holomorphes, afin de répondre à la question soulevée précédemment :

Soit f une fonction méromorphe sur U, existe-t-il N, D deux fonctions holomorphes sur U, $f = \frac{N}{D}$?

On a pu y répondre localement en factorisant les pôles de f, qui sont en nombre fini sur un compact. Mais si f a une infinité de pôles, c'est plus difficile.

Définition 12. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de nombre complexes. $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si $(\prod\limits_{n=0}^{N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. Soit X un ensemble et $(u_n : X \to \mathbb{C})$ une suite de fonctions. Leur produit converge *simplement* si $\prod u_n(z)$ converge pour tout $z \in X$, *uniformément vers* f si $\sup\limits_{z\in X} |\prod\limits_{n=0}^{N} u_n(z) - f(z)|$ tend vers 0 quand $N \to \infty$.

Lemme. Soit $(u_k)_{1\leq k\leq N} \in \mathbb{C}^N$. On note $P_N = \prod\limits_{k=1}^{N}(1+u_n)$, $P_N^* = \prod\limits_{k=1}^{N}(1+|u_n|)$. Alors

$P_N^* \leq exp(\sum\limits_{k=1}^{N} |u_k|)$; $|P_N - 1| \leq P_N^* - 1$.

Démonstration. La concavité du logarithme donne : $ln(1+u) \leq u$ pour tout u positif. En l'appliquant au produit des $(1+|u_k|)$, on a $\sum\limits_{k=1}^{N} ln(1+|u_k|) \leq \sum\limits_{k=1}^{N} |u_k|$, puis en prenant l'exponentielle : $P_N^* \leq exp(\sum\limits_{k=1}^{N} |u_k|)$.

Pour la deuxième identité, $|P_N - 1| = \prod\limits_{k=1}^{N}(1+u_k) - 1 = |\sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{K\subset J,\#K=j} \prod\limits_{i\in K} u_i|$. Une formule compliquée pour exprimer qui $P_N - 1$ est la somme de tous les produits d'éléments u_k. Maintenant en appliquant l'inégalité triangulaire on obtient $|P_N - 1| \leq P_N^* - 1$. □

Théorème 15. Soit $(u_n) : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions. Supposons $\sum u_n$ converge normalement sur X. Alors $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ converge normalement sur X. On note f sa limite, alors on a de plus

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, u_n(x) = -1$$

Démonstration. - Montrons que la suite des produits $P_N = \prod\limits_{n=1}^{N}(1+u_n)$ est uniformément de Cauchy.

$|P_N(x) - P_M(x)| = |P_N(x)||1 - \prod\limits_{n=N+1}^{M}(1+u_n(x))| \leq |P_N(x)(\prod\limits_{n=N+1}^{M}(1+|u_n(x)|) - 1)$ et donc

$(**)|P_N(x) - P_M(x)| \leq |P_N(x)(exp(\sum\limits_{n=N+1}^{M} |u_n(x)|) - 1)$ grâce aux inégalités du lemme.

Soit $\varepsilon > 0$, N_0 assez grand pour avoir $exp \sum\limits_{n=N_0}^{\infty} |u_n(x)| - 1 < \varepsilon$ (grâce à la convergence normale de $\sum u_n$, et $e^0 = 1$). Alors $|P_{N_0}(x) - P_M(x)| \leq \varepsilon \sup\limits_{x\in X} |P_{N_0}(x)|$. Soit $N, M \geq N$. On a alors $|P_N(x) - P_M(x)| \leq |P_N(x) - P_{N_0}(x)| + |P_M(x) - P_{N_0}(x)| \leq 2\sup_X |P_{N_0}|\varepsilon$. Ainsi (P_n) est uniformément de Cauchy.

- Si il existe n_0 avec $u_{n_0}(x_0) = -1$, alors $1 + u_{n_0}(x_0) = 0$, donc $\prod\limits_{k=0}^{m} u_k(x_0) = 0$ dès que $m \geq n_0$. Alors la fonction limite s'annule en x.

- En utilisant l'inégalité $(**)$, on a $|f(x) - P_{N_0}(x)| \leq |P_{N_0}(x)|\varepsilon$ pour tout x, puis $|f(x_0)| \geq |P_N(x_0)|(1-\varepsilon)$. Si f s'annule en x_0, il existe alors un entier n_0 à partir duquel $P_n(x_0)$ est constante, nulle. □

Ce théorème permet de bien voir la forme d'une limite de produit infini, et donne un critère suffisant (et presque nécessaire) de convergence d'un produit infini de fonction. Le "presque" nécessaire est justifié par le fait, qu'un produit infini peut converger sans cette hypothèse, mais alors la limite est nulle (avec quelques hypothèses topologiques sur X).

Corollaire. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U, avec $\sum(1-f_n)$ uniformément convergente sur les compacts de U. Alors $\prod f_n$ converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction holomorphe f. De plus, $Z(f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Z(f_n)$.

De plus, $\forall a \in U, v_a(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_a(f_n)$

Démonstration. - D'après le théorème précédent il est assez clair que le produit est convergent. La limite est une fonction holomorphe d'après la convergence uniforme sur les compacts.

- $Z(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z(f_n)$ est une conséquence directe du deuxième point du théorème.

- Soit a un zéro de f (on a déjà la réponse pour les non-zéros de f). f_n converge uniformément vers 1 sur les compacts. En particulier $\exists N, \forall n \geq N, |f_n(a) - 1| < \frac{1}{2}$, puis $|f_n(a)| \geq \frac{1}{2}$.

$f(z) = g(z) \prod_{n=0}^{N-1} f_n(z)$, où g ne s'annule pas en a donc $v_a(g) = 0 = \sum_{n=N}^{\infty} v_a(f_n)$. Alors $v_a(f) = \sum_{n=0}^{N-1} v_a(f_n)$. Tout cela ensemble, et $v_a(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_a(f_n)$. $\square$

On peut être encore plus précis mais ça ne me servira pas pour la suite.

Corollaire. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a_n|}$ converge. Alors $\exists f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), Z(f) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration. La série $\sum \frac{z}{a_n}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. En effet soit K un compact, $z \in K$ et ρ tel que $K \subset B(0, \rho)$. $|\sum_{n=N}^{M} \frac{z}{a_n}| \leq \rho \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{|a_n|}$, comme la série des $\frac{1}{|a_n|}$ converge, on peut $\sum_{n=0}^{N} \frac{z}{a_n}$ est uniformément de Cauchy sur K.

On applique le théorème : $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_n})$ et $f(z_0) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, 1 - \frac{z_0}{a_n} = 0$, soit $z = a_n$. $\square$

Pour pouvoir factoriser des zéros (a_n) sans aucune condition sur la suite, on va devoir s'y prendre différemment.

Définition 13. Les *facteurs de Weierstrass !* sont la suite de fonctions : $E_0(z) = 1 - z$;

$E_p(z) = (1 - z)exp(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k})$ pour $p \geq 1$

Remarque. Les termes de la somme dans l'exponentielle sont ceux du développement limité de $ln(1-z)$ au voisinage de 0 (pour la détermination qui prolonge le logarithme réel). C'est là que repose toute l'astuce je pense...

Proposition 18. Si $|z| \leq 1$, $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$

Démonstration. Pour $p = 0$ c'est évident. Soit $p \geq 1$.

$E'_p(z) = -exp(z + \frac{z^2}{2} + .. + \frac{z^p}{p}) + (1 - z) \sum_{k=0}^{p} z^k exp(z + \frac{z^2}{2} + .. + \frac{z^p}{p}) = -exp(z + \frac{z^2}{2} + .. + \frac{z^p}{p})z^p$

Ainsi $-E'_p(z)$ s'écrit comme une série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a_n = 0$ si $n \leq p - 1$. $E_p(0) - E_p(z) = \int_0^z -E'_p(u)du = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \int_0^z u^n du = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

$|1 - E_p(z)| \leq \sum_{n=p}^{\infty} a_n \frac{|z|^{n+1}}{n+1}$ car les a_n sont positifs, puis $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1} \sum_{n=p}^{\infty} a_n \frac{|z|^{n-p}}{n+1}$. Dans la somme, on majore $|z|^{n-p}$ par 1, on obtient alors $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}(1 - E_p(1))$. Et c'est gagné. $\square$

Théorème 16. *de factorisation de Weierstrass !*

Soit a_n une suite de nombre complexes sans points d'accumulation dans $\mathbb{C}$. (Donc elle tend vers l'infini). Soit p_n une suite d'entiers tels que $\sum(\frac{r}{|a_n|})^{p_n+1}$ converge. Alors $\prod E_{p_n}(\frac{z}{a_n})$ converge vers une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$

Démonstration. Déjà, on peut remarquer qu'une telle suite p_n existe toujours : $p_n = n$ fonctionne : à partir d'un certain rang n_1, $\frac{r}{|a_n|}$ est inférieur à 2, et ainsi $\sum_{n=n_1}^{\infty} (\frac{r}{|a_n|})^n \leq \frac{1}{2^{n_1-1}}$.

Soit K un compact, il existe n_0 tel que $|\frac{z}{z_n}| \leq \frac{1}{2}$ par bornitude de K. Soit $r = \sup_{z\in K} |z|$. Alors $|1 - E_{p_n}(\frac{z}{z_n})| \leq |\frac{z}{z_n}|^{p_n+1} \leq (\frac{r}{|z_n|})^{p_n+1}$. C'est le terme général d'une série convergente par hypothèse, ainsi d'après le théorème des produits infinis, $\prod E_{p_n}(\frac{z}{z_n})$ converge. $\square$

Proposition 19. Les fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ sont exactement les quotients de fonctions holomorphes. De manière algébrique on pourrait aussi le formuler :

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}) = Frac(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$$

Démonstration. Soit f une fonction méromorphe et S l'ensemble des pôles de f. S est localement fini dans $\mathbb{C}$, donc il existe une fonction holomorphe D prenant précisément ses zéros aux points de S : $D = \prod_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{v_n} E_{p_n}(\frac{z}{a_{n,k}})$ avec $a_{n,k} = a_{n,1}$ pour $k \geq 1$, $v_n = -v_{a_{n,1}}(f)$ la multiplicité du pôle, et $\bigcup a_{n,1} = S$. Alors Df est holomorphe : si p est un pôle de f, $v_p(Df) = v_p(f) - \sum_{k=1}^{v_n} 1 = 0$ par définition de v_n. Donc Df n'a que des singularités illusoires, elle admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ qu'on note N. Ainsi $f = \frac{N}{D}$. $\square$

Un dernier résultat d'interpolation infinie :

Proposition 20. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points du plan complexe sans points d'accumulation et $(\lambda_n)n \in \mathbb{N}$ une suite de coefficients complexes. Alors

$$\exists f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = \lambda_n$$

Démonstration. On peut supposer $a_n \neq 0$ pour tout n (on se ramène au cas général par une translation), et $|a_n|_{n\in\mathbb{N}}$ croissante (et tend vers l'infini).

Soit F la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et nulle sur (a_n), définie par :

$F = \prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ avec $f_n = E_n(\frac{z}{a_n}) = (1 - \frac{z}{a_n}) \exp(\sum_{k=1}^{n} (\frac{z^k}{na_n^k}))$

F est holomorphe, et elle a un zéro d'ordre 1 en chaque point a_n. Soit $F_n = \frac{F}{A_n f_n}$, où $A_n = \prod_{k\neq n} f_k(a_n)$. F_n s'annule sur $(a_k)_{k\neq n}$ et vaut 1 au point a_n. Finalement, $\lambda_n F_n$ interpole la suite au point a_n. Mais à priori, $\sum \lambda_n F_n$ n'est pas holomorphe. Il faut donc sommer des $\lambda_n F_n \varphi_n$, où φ_n est une fonction assez bien choisie pour faire converger la somme et telle que $\varphi_n(a_n) = 1$.

Soit K un compact, $K \subset \overline{B(0,\rho)}$, on impose aussi $\rho \geq 2$, $z \in K$. Soit n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n| \geq 2\rho$. Soit $n \geq n_0$. $|\lambda_n F_n(z)| = \frac{|\lambda_n|}{|A_n|}|F(z)||\frac{1}{f_n(z)}|$.

$|f_n(z)| = E_n(\frac{z}{a_n})$. $|\frac{z}{a_n}| \leq \frac{1}{2}$ donc $|1 - E_n(\frac{z}{a_n})| \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi $|E_n(\frac{z}{a_n})| \geq \frac{1}{2}$ et $|\lambda_n F_n| \leq 2|\lambda_n| M(\rho)\frac{1}{|A_n|}$, où $M(\rho) = \sup_K |F(z)|$.

Soit $\varphi_n(z) = \exp(k_n(z - a_n)e^{-i\arg(a_n)})$, où k_n reste à déterminer.

$Re((z - a_n)e^{-i\arg(a_n)}) \leq \rho - |a_n| \leq -\rho$. Donc $|\varphi_n(z)| \leq \frac{1}{A^{k_n}}$, où $A = e^\rho \geq e^2$. Il suffit de prendre une suite (k_n) qui croît assez vite pour que $|\frac{\lambda_n}{A_n}\frac{1}{A^{k_n}}|$ soit le terme général d'une suite convergente. La condition sur la suite (k_n) ne dépend pas du compact K mais uniquement des points (a_n) et coefficients (λ_n). Par exemple $k_n \geq \dfrac{\log(\frac{n^2\lambda_n}{A_n})}{2}$ convient.

Alors on définit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, par $f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n F_n$. Si K est un compact dans $B(0,\rho)$, on choisit n_0 tel que $|a_n| \geq 2\rho$. Alors

$|\sum_{n=0}^{p} \lambda_n F_n(z)\varphi_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{n_0} |\lambda_n F_n(z)\varphi_n(z)| + \sum_{n=n_0+1}^{p} |\frac{2\lambda_n M(\rho)}{A_n}\frac{1}{A^{k_n}}|$

En particulier si $q \geq n_0$, $|\sum_{n=q}^{q+k} \lambda_n F_n(z)\varphi_n(z)| \leq |\sum_{n=q}^{q+k}|\frac{1}{n^2}|M(\rho) \to 0, q \to \infty$. Donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}$. $f(a_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k F_k(a_n)\varphi_k(a_n)$. Si $k \neq n, F_k(a_n) = 0$. Donc $f(a_n) = \lambda_n\varphi(a_n)F_n(a_n) = \lambda_n$. $\square$

2.3 Topologie de $\mathcal{H}(U)$

Définition 14. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Proposition 21. $\mathcal{H}(U)$ est un espace vectoriel. De plus $\forall K \subset U$ compact, $||f||_k = \sup_{x \in K}\{|f(x)|\}$ définit une semi norme sur $\mathcal{H}(U)$.

Démonstration. Si f et g sont continues et dérivables sur U, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f + g$ est continue et dérivable sur U. Soit $K \subset U$ compact, $f \in \mathcal{H}(U)$;

- f est continue sur K compact, donc le sup existe.
- $\forall x \in K, |(f+g)(x)| \leq |f(x) + g(x)|$, donc
$||f+g||_K \leq \sup_K(|f| + |g|) \leq \sup_K |f| + \sup_K |g| \leq ||f||_K + ||g||_K$.
- $\forall x \in K, |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$ donc $||\lambda f||_K = |\lambda|||f||_K$ □

Remarque. Il se trouve que pour certains ouverts U et certains compacts K, $||f||_K$ est même une *norme* sur $\mathcal{H}(U)$. Cependant l'espace normé correspondant est moins riche que l'espace métrique qu'on va définir avec la famille de semi-normes.

On a donc une famille de semi-normes sur $\mathcal{H}(U)$: $(||.||_K)_{K \in I}$, où I est l'ensemble des compacts inclus dans U. On va à partir de ça, créer une topologie naturelle sur $\mathcal{H}(U)$ qui en fait un espace vectoriel topologique.

Pour définir la topologie associée à la famille de semi-normes $(||.||_K)_{K \in I}$, on va définir l'ensemble $\mathcal{V}_0$ des voisinages ouverts de 0.

Définition 15. Pour $K \subset U$ compact et $\varepsilon > 0$, on note :

$$V(K, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{H}(U), ||f||_K < \varepsilon\}$$

Les $(V(K,\varepsilon))_{K \subset U, \varepsilon > 0}$ sont une base de $\mathcal{V}_0$ par définition. Donc

$$\forall U \in \mathcal{V}_0, U = \bigcup_{K \in A, \varepsilon \in B} V(K, \varepsilon)$$

.

Remarque. Plusieurs remarques suivent cette définition :

(1) Il suffit de définir les voisinages de 0 pour définir les voisinages de tous les points : ceci est spécifique aux espaces *vectoriels* topologiques, car tous les problèmes sont inchangés par translation. $\mathcal{V}_f = f + \mathcal{V}_0$ définit les voisinages du point f.

(2) On aurait quelques propriétés à vérifier sur $\mathcal{V}_0$ pour justifier que cela définit bien une topologie : stabilité par inclusion, intersections finies,..

(3) $\mathcal{H}(U)$ est alors *localement convexe* ; cela a pour conséquence, que sa topologie est séparée (T_2).

Remarque. Que signifie $\lim_{n \to \infty} f_n = f$?

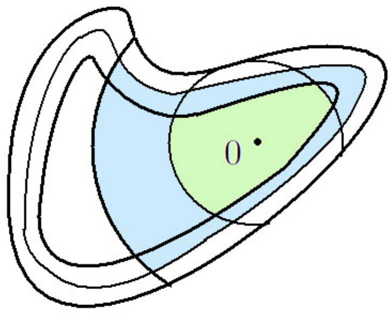
D'après la définition de la topologie, $\forall V_f \in \mathcal{V}_f, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, f_k \in V_f$. Comme V_f est une union de $V(K,\varepsilon) + f$, il faut et il suffit que cette propriété soit vraie pour tout V_f de la forme $V(K,\varepsilon) + f$.

Alors $\forall K \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, ||f_k - f||_K < \varepsilon$. Autrement dit, (f_k) converge uniformément vers f sur tout compact K inclus dans U. Donc $\mathcal{H}(U)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts !

Proposition 22. On peut extraire une famille *dénombrable* de semi-normes définissant la même topologie sur $\mathcal{H}(U)$.

Démonstration. Il s'agit de choisir des compacts K_n tels que la convergence vers 0 sur les K_n suffise à déduire la convergence sur tout compact K. Soit

$$K_n = \{z \in U, d(z, U^c) \leq \frac{1}{n}\} \cap \overline{D(0,n)}$$



C'est une suite exhaustive de compacts emboîtés de U : $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Il faut encore montrer que $\forall V(K,\varepsilon), \exists n \in \mathbb{N}, \eta > 0, V(K\varepsilon) \subset V(K_n,\eta)$. C'est évident car les K_n recouvrent U et sont croissants, donc tout K est recouvert à partir d'un certain rang, et ainsi $\eta = \varepsilon$ convient. □

L'intérêt d'avoir une famille de semi-normes dénombrables est de pouvoir construire une métrique définissant la même topologie :

Proposition 23. Soit $d : \mathcal{H}(U) \times \mathcal{H}(U) \to R^+$ définie par

$$d(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min(1, ||f-g||_{K_n})}{1+n^2}$$

Alors d est une métrique sur $\mathcal{H}(U)$ définissant la même topologie.

On ne va pas justifier cette propriété. La preuve repose sur l'inclusion des boules centrées en 0 de la métrique dans les voisinages de 0 et vice-versa. C'est à peu près ce qu'on vient de faire en incluant les compacts dans la suite exhaustive.

Théorème 17. $\mathcal{H}(U)$ muni de d est complet.

Démonstration. Soit f_n une suite de Cauchy de $\mathcal{H}(U)$. Alors pour tout compact K de U, $\lim_{\substack{p,q\geq N \\ N\to\infty}} ||f_p - f_q||_K = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, f_n converge vers une fonction f holomorphe sur U. □

Cette propriété est donc juste une reformulation du théorème de Weierstrass.

Remarque. On a aussi prouvé que $f \mapsto f'$ est continue (en reprenant la preuve de Weierstrass). Ce résultat est vrai aussi pour $f \mapsto f^{(j)}$.

Remarque. Comme on l'a mentionné plus tôt, dans certains cas la semi-norme $||.||_K$ est une norme. Par exemple, si $U = \mathbb{C}$ et $K = \overline{D(0,\frac{1}{2})}$. La dernière condition à vérifier était : $||f||_K = 0 \Rightarrow f = 0$. C'est le cas grâce au théorème du prolongement analytique. Plus généralement, si U a un nombre fini de composantes connexes et K est un compact dont l'intersection avec *chaque* composante connexe est *d'intérieur non vide*, alors $||.||_K$ est une norme.

Mais, $\mathcal{H}(U)$ est de dimension infinie et aucune de ces normes ne sont équivalentes deux à deux (donc aucune ne définit une topologie plus naturelle).

Plus grave : l'espace n'est pas complet si on le munit d'une telle norme. En reprenant l'exemple précédent, $(\sum_{k=0}^{N} x^k)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\overline{D(0,\frac{1}{2})}$. Mais elle ne converge pas dans $\mathcal{H}(U)$ car sa fonction limite est $z \mapsto \frac{1}{1-z}$, qui n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Définition 16. Une partie $\mathcal{P}$ d'un espace vectoriel topologique de semi-normes $(||.||_K)_{K\in I}$ est *bornée* si et seulement si :

$$\forall K \in I, \exists M_K, \forall x \in \mathcal{P}, ||x||_K \leq M_K$$

Dans notre cas, une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{H}(U)$ est bornée si pour tout compact $K \subset U$, les fonctions de $\mathcal{P}$ sont bornées dans leur ensemble sur K.

Soit $\mathcal{F}$ famille de fonctions sur U et $x \in U$. $\mathcal{F}$ est *équicontinue* en x si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$\mathcal{F}$ est équicontinue sur U si elle est équicontinue en tout $x \in U$.

Théorème 18. *de Montel :*

Toute partie bornée de $\mathcal{H}(U)$ est équicontinue.

Démonstration. Encore une fois, cela repose sur l'inégalité de Cauchy :

Soit $\mathcal{F}$ une partie bornée de $\mathcal{H}(U)$ et soit K un compact convexe de U. On construit L par le même procédé que dans la preuve précédente : $L = K + D(0, r)$ où $r = \frac{1}{2}d(K, U^c)$. $\mathcal{F}$ étant bornée, $\forall f \in \mathcal{F}, \forall z \in L, |f(z)| \leq M_L$. Soit $z \in K$ et $f \in \mathcal{F}$. $|f'(z)| = |\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C(z,r)} \frac{f(w)dw}{(w-z)^2}| \leq \frac{M_L}{r}$.

Par l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|\frac{M_K}{r}$ Alors la famille est équicontinue : soit $\varepsilon > 0$, on prend $\eta = \frac{r}{M_k}\varepsilon$ et $\forall f \in \mathcal{F}$, $|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

La propriété étant locale, elle reste vraie pour tout compact en le recouvrant par une famille de compacts convexes. □

Corollaire. Les parties compactes de $\mathcal{H}(U)$ sont les parties fermées bornées.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ une partie fermée bornée de $\mathcal{H}(U)$. Elle est donc équicontinue. D'après Arzéla-Ascoli, $\mathcal{F}$ est une famille compacte de $\mathcal{C}^0(K_n, \mathbb{C})$ pour tout n (car K_n est compact). Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$.

On extrait de $f_k|_{K_0}$ une sous suite convergente vers f^0 sur K_0 par l'extraction φ_0. On choisit φ_0 de sorte que $||f^0 - f_{\varphi_0(0)}||_{K_0} \leq \frac{1}{1}$

De même on extrait de $(f_{\varphi_0(k)}|_{K_1})$ une sous suite convergente vers f^1 sur K_1. On choisit φ_1 de sorte que $||f^1 - f_{\varphi_1(1)}|| \leq \frac{1}{2}$

En itérant le procédé, on a une extraction φ_p et une famille de fonctions $f^0, f^1, .., f^p$ avec $||f_{\varphi_p(p)} - f^p|| \leq \frac{1}{p+1}$.

Les f^j sont holomorphes comme limites uniformes de fonctions holomorphes. Par ailleurs ce sont des restrictions d'une même fonction f d'après le principe du prolongement analytique, car les K_n sont emboîtés ; elle est définie sur U car les K_n recouvrent U. Donc f_k converge uniformément vers f sur les compacts de U, ou encore $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f \in \mathcal{F}$. □

2.4 Approximations et simple connexité

Théorème 19. *de Weierstrass !*

L'espace des fonctions polynômiales sur un segment est dense dans l'ensemble des fonction continues sur ce même segment.

Ce résultat bien connu sur $\mathbb{R}$ est vrai à priori sur les segments de $\mathbb{C}$: on peut ramener f définie sur le segment $[z_1, z_2]$ à une fonction définie sur un segment de $\mathbb{R}$: $g = f \circ (z \mapsto (z_2 - z_1)z + z_1)$ est définie sur $[0, 1]$.

Bien entendu on va plutôt chercher à approcher des fonctions *holomorphes* sur un compact. La question est de chercher une condition suffisante sur K pour que toute fonction holomorphe sur un voisinage de K soit uniformément approchable par une suite de polynômes.

Exemple. Le compact S^1 : soit f définie sur S^1 par $f(z)=\frac{1}{z}$. Si f s'approchait uniformément par une suite (p_n) de polynômes,
$\int\limits_{S^1} f(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{S^1} p_n(z)dz = 0$. Or on a déjà vu que cette intégrale vaut $2i\pi$. On voit donc qu'il va falloir une condition supplémentaire sur le compact.

Théorème 20. *de Runge*
Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que K^c soit connexe. Alors toute fonction holomorphe sur un voisinage de K est une limite uniforme de polynômes.

Démonstration. Soit f définie et holomorphe sur un voisinage U de K.
On suppose que K est connexe. On raisonne ensuite de même sur chaque composante connexe de K.
On commence par recouvrir K par un nombre fini de "boules" carrées : des boules pour la norme infinie de $\mathbb{R}^2$. Comme les normes sont équivalentes, K est aussi compact pour cette topologie. On peut donc extraire un sous recouvrement fini du recouvrement de K par les $B(x, d(x, U^c))$ où x décrit K.
Soient $\gamma_1, ..., \gamma_N$ les frontières de ces boules. Alors $\forall z \in K, f(z)$
RAAA □

- Théorème de Runge
- Utilisation : Théorèmes de Jordan
- Caractérisation des ouverts simplement connexes. ($\mathbb{C} \setminus U$ n'a pas de comp connexe bornées)

2.5 Bijections holomorphes 1.0

Lemme. *de Schwarz :*
Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ holomorphe vérifiant $f(0)=0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
De plus, si $|f'(0)|=1$ alors $\exists \theta \in \mathbb{R}, f = e^{i\theta} Id$

Démonstration. Il s'agit d'une application du principe du maximum :
Soit g définie par $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$. g est holomorphe sur $D(0,1)$ car sa singularité en 0 est effaçable. $g(0)=f'(0)$.
Soit $r<1$, sur $D(0,r)$ on a $|g(z)| = \dfrac{f(z)}{z}$. Le maximum sur $D(0,r)$ est atteint sur la frontière d'après le principe du maximum. Donc il existe un point z_r, $|z_r| = r$, $\sup\limits_{\overline{D(0,r)}} = g(z_r)$. Alors $|g(z)| \leq \dfrac{f(z_r)}{z_r} \leq \dfrac{1}{r}$.
En faisant tendre r vers 1 on a $|g(z)| \leq 1$ sur $D(0,1)$, donc $|f(z)| \leq |z|$.
De plus $|f'(0)| \leq 1$ sinon $g(0) > \sup\limits_{D(0,1)} |g|$. Par ailleurs si $|f'(0)|=1$ le maximum de g est atteint en un point intérieur. D'après le principe du maximum g est alors constante, donc $\exists \lambda, f = \lambda Id$. D'après les hypothèses ce λ est alors de module 1. □

Théorème 21. d'Hurwitz
Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur U ouvert connexe, ne s'annulant pas sur U. On suppose que f_n converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction f.
Si f s'annule sur U, alors elle est identiquement nulle.

Démonstration. On suppose que f s'annule au point $a \in U$ et n'est pas identiquement nulle. Soit r tel que $\overline{D(a,r)} \subset U$ et tel que f n'ait pas d'autres zéros sur ce compact. $\int\limits_{C(a,r)} \frac{f'(w)dw}{f(w)} = m > 0$ d'après le théorème de Rouché.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int\limits_{C(a,r)} \frac{f_n'(w)dw}{f_n(w)} = 0$.
(f_n) converge uniformément vers f, donc $\frac{1}{f_n}$ converge uniformément vers $\frac{1}{f}$ et f_n' converge uniformément vers f' sur $C(a,r)$: la première affirmation se vérifie directement, l'autre découle des

inégalités de Cauchy. Alors on a $\frac{f_n'}{f_n} \to \frac{f'}{f}$ et la convergence est uniforme sur $C(a,r)$. On déduit de cette convergence une interversion de opérateurs lim et $\int$:

$0 = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f_n'(w)dw}{f_n(w)} = \int\limits_{C(a,r)} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n'(w)dw}{f_n(w)} = \int\limits_{C(a,r)} \frac{f'(w)dw}{f(w)} > 0$

Donc le zéro de f en a n'est pas isolé, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire. Soit U ouvert connexe et f_n une suite convergente de fonctions injectives sur U. Alors la limite est injective ou constante.

Démonstration. Soit $a \in U$. La fonction $f_n - f_n(a)$ est non nulle sur $U \setminus \{a\}$. Cet ensemble est connexe (facile à voir géométriquement). Elle converge uniformément vers $f - f(a)$ sur les compacts de U. Alors $f - f(a)$ ne s'annule pas ou est identiquement nulle. Dans le second cas, f est constante. Dans le premier cas l'équation $f(z) = f(a)$ n'a qu'une solution. En raisonnant pour tous les a on voit alors que f est injective. □

Exemple. Soit $U = \{z, Re(z) > 1\}$. La fonction ζ s'écrit avec le produit Eulérien sur cet ouvert :

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\leq N}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

A N fixé ces fonctions ne s'annulent pas. La convergence est uniforme sur les compacts de U. ζ est bien sûr, non identiquement nulle. Donc ζ ne s'annule pas sur U.

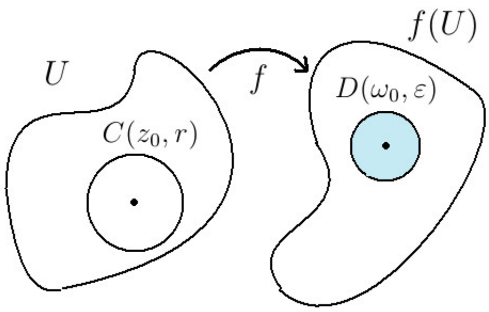
Soit f_n définie par $f_n(z) = \frac{1}{n}e^z$. Les f_n ne s'annulent pas sur $\mathbb{C}$ mais la suite de fonctions converge uniformément sur les compacts vers la fonction identiquement nulle.

Théorème 22. de l'image ouverte :

Soit f holomorphe non constante sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit f une telle fonction et $z_0 \in f(U)$. On veut construire une boule autour de $f(z_0)$ incluse dans l'image. On note $\omega_0 = f(z_0)$

Soit $r > 0$ tel que $f - \omega_0$ ne s'annule qu'en z_0 sur $\overline{D(z_0, r)}$. On peut choisir un tel r d'après le principe du maximum, car f est non constante et U est connexe. On note ε le minimum (non nul) de $f - \omega_0$ sur $C(z_0, r)$. Alors si $|w - w_0| < \varepsilon$, $|f - \omega - (f - \omega_0)| < |f - \omega_0|$ sur $C(z_0, r)$.



On applique alors le théorème de Rouché sur le lacet $C(z_0, r)$: en particulier pour tout ω de $D(\omega_0, \varepsilon)$ l'équation $f - \omega = 0$ admet une solution, donc f recouvre le disque. □

Corollaire. Toute application $f : U \to V$ bijective holomorphe est de réciproque holomorphe.

Démonstration. On note φ l'application réciproque de f. Soit U' ouvert connexe de U. $\varphi^{-1}(U') = f(U')$ est ouvert d'après le théorème de l'image ouverte (car f est évidemment non constante). De même $\varphi'^{-1}(U')$ est ouvert sauf si f' est constante. Mais dans ce cas la réciproque de f est affine donc holomorphe.

Comme l'holomorphie est une propriété locale, le raisonnement sur les U' connexes est suffisant pour conclure. Ainsi f^{-1} est holomorphe. □

Corollaire. Théorème d'inversion locale :

Soit f holomorphe sur U telle que f' ne s'annule pas sur U. Alors pour tout x de U il existe un voisinage ouvert V_x et un voisinage ouvert $W_{f(x)}$ tels que $f|_{V_x} V_x \to W_{f(x)}$ est un biholomorphisme de V_x sur W_x.

Démonstration. Comme $f'(x)$ est non nulle, on peut appliquer le théorème d'inversion locale (sur $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}^2$) : f est localement un homéomorphisme de V_x sur W_x.

De plus f est holomorphe sur cet ensemble, donc d'après ce qu'on vient de dire, sa réciproque est holomorphe aussi. □

Remarque. Ceci est une propriété locale et à nouveau on ne peut pas affirmer que si f' est non nulle, f admet une réciproque holomorphe sur U. Des contre-exemples très simples appuient ce propos : la fonction exponentielle par exemple.

2.6 Bijections holomorphes 2.0

Définition 17. Soient $\theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}$ On note $\varphi_{\alpha,\theta}$ la *transformation de Möbius* définie sur $\overline{\mathbb{D}}$ par

$$\varphi_{\alpha,\theta}(z) = e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$$

Proposition 24. Les transformation de Möbius sont des bijections holomorphes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. De plus, ce sont les seules.

Démonstration. On commence avec $\theta = 0$. L'application $\varphi : z \mapsto \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$ est une fraction rationnelle, son unique pôle est en $\frac{1}{\overline{a}}$. Comme $|\frac{1}{\overline{a}}| > 1$, elle est holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{D}$.

Soit ξ, $|\xi| = 1$. Alors $|\frac{a-\xi}{1-\overline{a}\xi}| = \frac{|a-\xi|}{|\overline{\xi}-\overline{a}|} = 1$. D'après le principe du maximum, on a alors $|\varphi(z)| \leq 1$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ et $|\varphi(z)| < 1$ sur $\mathbb{D}$.

$\varphi_a(\varphi_a(z)) = \frac{a - \frac{a-z}{1-\overline{a}z}}{1-\overline{a}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}} = \frac{a(1-\overline{a}z)-(a-z)}{1-\overline{a}z-\overline{a}(a-z)} = z\frac{(1-|a|^2)}{(1-|a|^2)} = z$. Ainsi, φ_a est bijective sur $\mathbb{D}$, et elle est sa propre inverse. De plus, elle réalise aussi une bijection de $\mathbb{T}$.

Soit $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une bijection holomorphe. Soit $a = \psi(0)$. Alors $g = \psi \circ \varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est aussi une bijection holomorphe, et $g(0) = 0$. D'après le lemme de Schwartz, $|g(z)| \leq |z|$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. De plus comme l'inégalité est atteinte sur le bord, $g = \lambda Id$, $|\lambda| = 1$. Ainsi $g = \lambda\varphi_a = \varphi_{a,\theta}$, $\lambda = e^{i\theta}$. □

Théorème 23. *de représentation conforme de Riemann*

Tout ouvert simplement connexe différent de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent au disque unité.

Démonstration. Étape 1 : On se ramène à U borné.

Soit U un ouvert simplement connexe non-borné (différent de $\mathbb{C}$). Soit $w \in \mathbb{C} \setminus U$. Comme U est simplement connexe, on peut choisir une détermination de $\log(z-w)$, notée $\ln_w$. Ainsi, $\exists g \in \mathcal{H}(U), \forall z \in U, g^2(z) = z - w$: on prend pour cela $g(z) = \exp(\frac{1}{2}\ln_w(z))$. g est injective et non-nulle sur U. De plus $\forall z_1, z_2 \in U, g(z_1) = -g(z_2)$ car on aurait alors $z_1 = z_2$ ce qui est impossible. Comme g est évidemment non constante, g est ouverte d'après le Théorème de l'application ouverte. Ainsi $\exists a \in g(U), r > 0$ tels que $\mathcal{B}(a,r) \subset g(U)$. Par une propriété précédente de g, on a $\mathcal{B}(-a,r) \cap g(U) = \emptyset$, ou encore $|g(z) + a| > r \ \forall z \in U$. On pose alors $\psi \in \mathcal{H}(U)$ définie par $\psi(z) = \frac{1}{g(z)+a}$: cette fonction est bien holomorphe sur U car $g(z) + a \neq 0$, bornée ($\frac{1}{|g(z)+a|} < r \ \forall z \in U$). Elle est injective car g l'est et non-nulle. Par le théorème d'inversion holomorphe, ψ est un biholomorphisme de U sur un ouvert borné simplement connexe (la simple connexité est une propriété topologique donc préservée par ψ qui est un homéomorphisme en particulier).

Étape 2 : Construction d'une "plus grande" fonction injective

Quitte à effectuer une translation et une homothétie (qui sont des biholomorphismes), on suppose $U \subset \mathbb{D}$ et $0 \in U$. On considère $\mathfrak{F}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{D}$ injectives et nulles au point 0. Cet ensemble est non-vide car il contient $z \longmapsto z$.

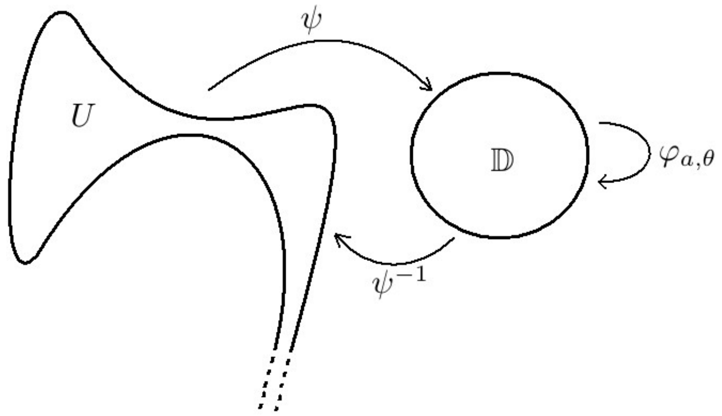
Si $f \in \mathfrak{F}(U)$ vérifie $f(U) \subsetneq \mathbb{D}$, alors $\exists h \in \mathfrak{F}(U)$ tel que $|h'(0)| > |f'(0)$. Ainsi, pour avoir $f(U) = \mathbb{D}$, il suffira de prendre f dans $\mathfrak{F}(U)$ tel que $|f'(0)|$ soit maximal.

Si $f(U) \subsetneq \mathbb{D}$, soit $a \in \mathbb{D} \setminus f(U)$ et
$varphi_a : z \longmapsto \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \in \Delta$ l'automorphisme associé. Comme φ_a ne s'annule pas sur U qui est simplement connexe, on peut comme précédemment trouver $g_a \in \mathcal{H}(U)$ tel que sur U, $g_a^2 = \phi_a$. Comme ϕ_a est injective et à valeurs dans $\mathbb{D}$, g_a vérifie également ces propriétés. On pose $b = g_a(0)$ et on définit φ_b comme précédemment. Soit alors $h : U \longmapsto \mathbb{D}$ telle que $h = \phi_b \circ g_a \circ f$. Elle est holomorphe, injective, et $h(0) = 0$. De plus, $h'(0) = f'(0)\frac{|a|+1}{2\sqrt{|a|}}$. Or, $\frac{|a|+1}{2\sqrt{|a|}} > 1$ car $|a| + 1 - 2\sqrt{|a|} = (1 - \sqrt{|a|})^2 > 0$ (car $a \in \mathbb{D}$ donc $|a| < 1$).

Etape 3 : existence du maximum

Comme $\forall f \in \mathfrak{F}(U), \forall z \in U, |f(z)| < 1$, $\mathfrak{F}(U)$ est uniformément bornée sur tout compact de U. D'après le théorème de Montel, $\mathfrak{F}(U)$ est compact. Soit $\alpha = \sup_{f \in \mathfrak{F}(U)} |f'(0)|$, et f_n une suite de fonctions de $\mathfrak{F}(U)$ qui approche ce sup. On en extrait donc une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout compact vers une limite notée f_U. On a également $f'_{\phi(n)} \longrightarrow f'_U$. Par continuité de $f \mapsto |f'(0)|$, $|f'_U(0)| = \alpha > 0$ et f_U est non-constante. Par le théorème de Hurwitz, f_U est injective. Aussi, comme $f_{\phi(n)}(U) \subset \mathbb{D}$, $f_U(U) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Par le théorème de l'application ouverte,$f_U(U)$ est ouvert donc $f_U(U) \subset \mathbb{D}$ et $f_U \in \mathfrak{F}(U)$, elle est surjective d'après l'étape 2. □

Corollaire. Soit U un ouvert simplement connexe, différent de $\mathbb{C}$ et $\psi : U \to \mathbb{D}$ une bijection holomorphe. Alors les bijections holomorphes de U sont les fonctions $f = \psi^{-1} \circ \varphi_{a,\theta} \circ \psi$



Démonstration. On remarque aisément que de telles constructions sont effectivement des automorphismes de U. D'autre part, si f est un automorphisme de U, alors $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{D}$: il est donc bien de la forme $\varphi_{a,\theta}$, puis f est de la forme voulue. □

Remarque. J'ignore s'il existe une théorie pour cela, mais on doit pouvoir énoncer un résultat similaire pour un ouvert *non simplement connexe* : par exemple, j'ose volontiers avancer que ceci est raisonnable :

Soit U un ouvert connexe (par arcs), différent de $\mathbb{C}$ de groupe fondamental G le groupe libre d'alphabet $\mathcal{A} \subset \mathbb{D}$. Alors il existe une bijection holomorphe de U vers $\mathbb{D} \setminus \mathcal{A}$.

Comme ils ont le même groupe fondamental, il est très possible qu'ils soient conformément équivalent, étant donné que c'est exactement l'énoncé du théorème de Riemann.

De la même façon, en écrivant U comme l'union disjointe (dénombrable) de ses composantes connexes on pourrait alors classifier tous les ouverts à bijection holomorphe près.

Proposition 25. Les transformations biholomorphes de $\mathbb{C}$ sont les fonctions affines non constantes.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une bijection holomorphe. f' ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, sinon f n'est pas localement injective au voisinage du zéro de f'. Ainsi, si f est polynômiale, f est affine non constante.

Si f est non polynômiale, elle a une singularité essentielle à l'infini : $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ a une singularité essentielle en 0. D'après le théorème de Weierstrass, l'image de tout voisinage de 0 est dense dans $\mathbb{C}$, de plus il est ouvert par le théorème de l'image ouverte. On se convainc sans trop de difficultés que f n'est alors pas injective.

Supposons par l'absurde que f est injective. Soient U, U' deux voisinages de 0 épointés, et $\overline{U} \subset U'$. Alors $V = f(U) \subsetneq f(U') = V'$, mais tous les deux sont denses. $V' \setminus V$ contient au moins l'ouvert $f(U' \setminus \overline{U})$, et du coup V n'est pas dense. □

2.7 Théorème de Picard

On a déjà dit un mot du théorème de Picard dans la section "singularités". Il répond à une question assez naturelle : les fonctions entières sont-elles surjectives ? Non, mais presque ! Par exemple $exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. La question est naturelle car le théorème de Gauss affirme justement que les polynômes sont surjectifs, et il paraît raisonnable de vouloir étendre un tel résultat.

Lemme. Soit D=D(0,1) et f holomorphe sur D. On suppose $|f'(0)| = 1$ et $\lambda = \sup\limits_{z\in D} |f'(z)|$. Alors il existe un ouvert $V \subset D$ tel que $f|_V$ soit une bijection de V sur un disque $D(f(0), \rho)$, avec $\rho = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)\lambda^{2n-1}}$

Démonstration. Quitte à remplacer f par $\alpha f + \beta$, on peut prendre $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On ne perd aucune information mentionnée dans l'énoncé.

On voit que $\lambda \leq 1$, supposons pour commencer $\lambda = 1$.

f' est holomorphe sur D et atteint son module maximal en 0. D'après le principe du maximum, f' est alors constante égale à 1, donc $f(z) = z$.

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1$$

Avec V=D on a bien f bijective de D sur D=$D(f(0), \rho)$.

On traite maintenant le cas $\lambda > 1$: Pour commencer $\rho < \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\lambda}$. D'après le principe du maximum $\forall z \in D, |f'(z)| < \lambda$, comme 1 et λ^2 sont symétriques par rapport à λ. Pour $\lambda > 1$, on a

$$|Z| < \lambda \Leftrightarrow |\frac{Z-1}{Z-\lambda^2}| < \frac{1}{\lambda}$$

Donc $\forall z \in D, |f'(z)| < \lambda$ équivaut à dire $\forall z \in D, \lambda|\frac{f'(z)-1}{f'(z)-\lambda^2}| < 1$.

$\lambda\frac{f'-1}{f'-\lambda^2}$ est holomorphe de D dans D, nulle en 0, donc d'après le lemme de Schwarz on a : $|\frac{f'(z)-1}{f'(z)-\lambda^2}| \leq \frac{|z|}{\lambda} \quad \forall z \in D$. De là : $|f'(z) - 1| \leq \frac{|z|(|f'(z)-1|+(\lambda^2-1))}{\lambda}$ puis

$$|f'(z) - 1| \leq \frac{(\lambda^2 - 1)|z|}{\lambda - |z|}$$

Cette majoration de $f' - 1$ va présenter de l'intérêt en remarquant : $f(z) - z = z\int\limits_0^1 (f'(tz) - 1)dt$, donc on a maintenant : $|f(z) - z| \leq (\lambda^2 - 1)\int\limits_0^1 \frac{t|z|^2}{\lambda - t|z|}dt$,

$$|f(z) - z| \leq (\lambda^2 - 1)(\lambda \log \frac{\lambda}{\lambda - |z|} - |z|\ )$$

On considère le lacet $|z| = \frac{1}{\lambda}$. Sur ce lacet le second membre vaut :

$$\begin{aligned}(\lambda^2-1)(-\lambda\log(1-\tfrac{1}{\lambda^2})-\tfrac{1}{\lambda}) &= (\lambda^2-1)(\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\lambda}{n}(\tfrac{1}{\lambda^2})^n-\tfrac{1}{\lambda})\\ &= \tfrac{1}{\lambda}-\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\lambda(\lambda^2-1)}{n}(\tfrac{1}{\lambda^2})^n\\ &= \tfrac{1}{\lambda}-\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\lambda^3}{n\lambda^{2n}}-\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\lambda}{n\lambda^{2n}}\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n(n-1)\lambda^{2n-1}}+\lambda-\lambda+\tfrac{1}{\lambda}\\ &= \tfrac{1}{\lambda}-\rho\end{aligned}$$

Soit $|w|<\rho$, $|f(z)-z|<|z-w|$ sur le lacet $|z|=\frac{1}{\lambda}$ d'après ce qu'on a prouvé ci dessus.

$|(f(z)-w)-(z-w)|<|z-w|$ sur le lacet donc d'après le théorème de Rouché, $f-w$ a autant de zéros que $Id-w$ dans le disque ouvert délimité par le lacet $|z|=\frac{1}{\lambda}$ soit $D(0,\frac{1}{\lambda})$.

Comme $|w|<\rho<\frac{1}{\lambda}$ la fonction de droite s'annule une fois (et une seule) dans $D(0,\frac{1}{\lambda})$, donc f prend exactement une fois la valeur w.

Ainsi $f|_{D(0,\frac{1}{\lambda})}$ est surjective sur $D(0,\rho)$ et pour avoir la bijection voulue il suffit de prendre $V = D(0,\frac{1}{\lambda})\cap f^{-1}(D(0,\rho))$. □

On peut montrer qu'une telle valeur de ρ est maximale au vu des hypothèses, donc il existe une fonction vérifiant les conditions qui ne peut pas recouvrir une boule centrée en $f(0)$ de rayon supérieur à ρ.

Lemme. Il existe un réel $x>0$ vérifiant : pour toute fonction f holomorphe sur D(0,R), si $0<\rho<\sup\limits_{|z|<R}(R-|z|)|f'(z)|$, $\exists U$ ouvert de D(0,R) tel que $f|_U$ est une bijection de U sur un disque ouvert de rayon $x\rho$

Démonstration. Soit $r\in]0,R[$ tel que $\rho<\sup\limits_{|z|\le r}(R-|z|)|f'(z)|$. Soit z_0 un élément de $\overline{D}(0,r)$ pour lequel la borne supérieure est atteinte (existe par compacité).

$r-|z_0|=\delta>0$ et si $|z-z_0|<\delta$ on a $|\frac{f'(z)}{f'(z_0)}|\le\frac{\delta}{r-|z|}\le\frac{\delta}{\delta-|z-z_0|}$

Soit $\theta\in]0,1[$ soit g définie par $g(z)=\frac{f(z_0+\theta\delta z)}{\theta\delta f'(z_0)}$

g est holomorphe sur D(0,1), $|g'(0)|=1$ et $\sup\limits_{z\in D}|g'(z)|\le\frac{1}{1-\theta}$ On peut donc appliquer le lemme précédent et trouver $V\subset D$ tel que $g|_V$ soit une bijection sur un disque ouvert de rayon $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(1-\theta)^{2n-1}}{n(n+1)}$.

Soit $U=z_0+\theta\delta V$, alors $f|_U$ est une bijection sur un disque qui est une homothétie de $g(V)$ de rapport supérieur à $\theta\rho$. On peut donc prendre pour x n'importe quelle valeur prise par $\theta\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(1-\theta)^{2n-1}}{n(n+1)}$ □

L'ensemble de tels x forme un intervalle $[0,x_{max}]$. Pour $\theta=\frac{1}{2}$ on obtient $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n(n+1)4^n}=\frac{3}{4}ln(\frac{3}{4})+\frac{1}{4}\simeq 0.03423...$ Donc $x=0.03$ convient. Il n'est absolument pas optimal, libre au lecteur d'en chercher un meilleur.

Théorème 24. premier énoncé du théorème de Picard :

Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a\in U$ et $M\ge 1$ Soit $\mathcal{F}_{a,M}$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, ne prenant aucune des deux valeurs 0 et 1, et telles que $\frac{1}{M}\le|f(a)|\le M$

La famille $\mathcal{F}_{a,M}$ est bornée sur toute partie compacte de U.

L'idée de la preuve repose sur le fait que si 0 et 1 sont évités par une fonction f, on peut construire des fonctions évitant une quantité abondante de valeurs du plan complexe. Le lemme précédent permettra de majorer de telles fonctions car les rayons des boules qu'elles recouvrent sont limités, puis de majorer les valeurs prises par f.

Démonstration. On étudie d'abord le cas particulier où U est un disque $D(a, R)$. Bien sûr le problème ne dépend pas du point a, on peut donc le choisir $a = 0$. Soit f holomorphe sur U vérifiant les conditions de l'énoncé. f ne s'annule en aucun point et U est simplement connexe car convexe. D'après la première section, f admet un logarithme holomorphe sur U.

Soit f_1 telle que $exp(2\mathrm{i}\pi f_1) = f$. Comme f_1 est définie à un entier près, on peut choisir f_1 vérifiant : $|Re(f_1(0))| \leq \frac{1}{2}$ De plus $-2\pi Im(f_1(0)) = |\log(f(0))| \in [-\log M, \log M]$ par hypothèse. Cela permet de dire

$$(1) \quad |f_1(0)| \leq M_1 = \frac{1}{2} + \frac{\log M}{2\pi}$$

Par ailleurs f ne peut pas prendre la valeur 1. Cela impose à f_1 de ne pas prendre de valeurs entières.

f_1 est non nulle sur U, de même que $f_1 - 1$. Elles admettent donc toutes les deux des racines carrées holomorphes sur U car U est simplement connexe. Soit g_0 une racine carrée de f_1 et g_1 une racine carrée de $f_1 - 1$. On appelle f_2 la fonction holomorphe sur U définie par $f_2 = g_0 + g_1$.

$(g_0 + g_1)(g_0 - g_1) = g_0^2 - g_1^2 = f - (f - 1) = 1$, ainsi $\frac{1}{f_2} = g_0 - g_1$ et on a :

$$(2) \quad \frac{1}{M_2} \leq |f_2(0)| \leq M_2 \qquad M_2 = M_1 + \sqrt{1 + M_1}$$

Par ailleurs f_2 ne peut pas prendre les valeurs de la forme :

$$w(\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}) \ , \ w^4 = 1$$

Enfin, cette condition impose en particulier que f_2 ne s'annule pas sur U, donc elle admet à nouveau un logarithme par simple connexité de U. Ainsi on définit f_3 holomorphe sur U de sorte que $exp(f_3) = f_2$. Comme f_3 est définie modulo $2\mathrm{i}\pi$ on peut lui imposer $|Im(f_3(0))| \leq \pi$. De plus $Re(f_3(0)) = \log |f_2(0)| \in [-\log M_2, \log M_2]$ Alors on a

$$(3) \quad |f_3(0)| \leq M_3 = \pi + \log M_2$$

Et f_3 ne peut prendre aucune valeur dans le quadrillage :

$$\{\pm \log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) + \mathrm{i}p\frac{\pi}{2}\}_{n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}}$$

L'écart entre les parties imaginaires est constant, celui entre les parties réelles est décroissant quand $n \to +\infty$ et symétrique par rapport à l'axe Oy.

Donc il existe un rayon R tel que tout disque de rayon R intersecte le quadrillage. En d'autres termes, f_3 ne peut pas être surjective sur une boule de rayon supérieur à un tel R. On prend δ le diamètre maximal d'une boule incluse dans $Im(f_3)$.

Soit ρ tel que $0 < \rho < \sup\limits_{|z|<R} (R - |z|)|f_3'(z)|$ et x la constante donnée par le lemme précédent. On a donc $2x\rho < \delta$ car f_3 est surjective sur un disque de rayon $x\rho$. Donc $|f_3'(z)| \leq \frac{\delta}{2x} \frac{1}{R-|z|}$ sur $D(0, R)$ Les compacts de $D(0, R)$ sont recouverts par les $\overline{D}(0, r), r < R$.

Soit $|z| \leq r < R$,

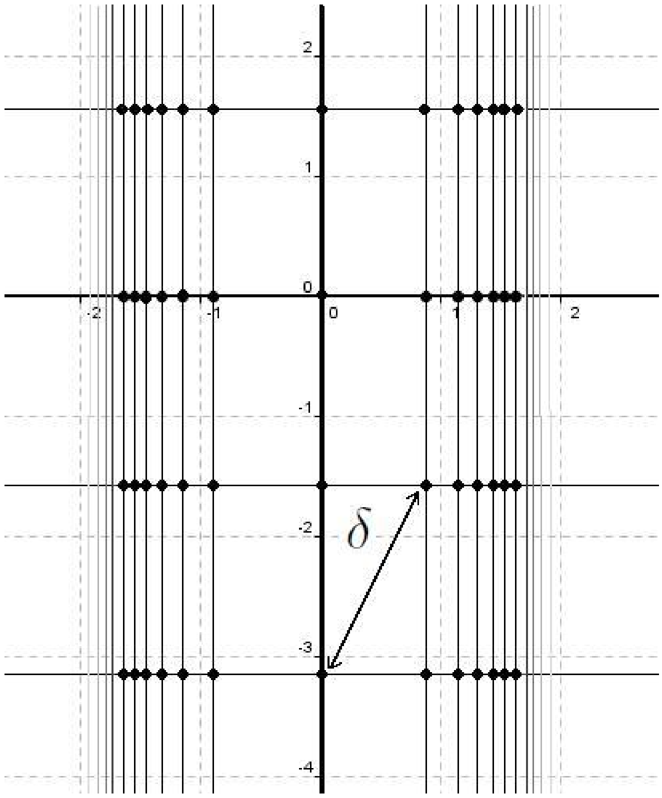
$$(3) \Rightarrow |f_3(z)| \leq M_3(r) \qquad M_3(r) = M_3 + \frac{\delta}{2x(R-r)}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{M_2(r)} \leq |f_2(z)| \leq M_2(r) \qquad M_2(r) = exp(M_3(r))$$

$$(1) \Rightarrow |f_1(z)| \leq M_1(r) \qquad\qquad M_1(r) = M_2(r)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M(r)} \leq |f(z)| \leq M(r) \qquad M(r) = exp(2\pi M_1(r))$$

Toutes ces constantes sont indépendantes de f et ne dépendent que du compact. Donc on a prouvé le résultat quand U est un disque.



Soit U ouvert connexe quelconque. Soit

$$V = \{z \in U, \exists M(z) \geq 1, \quad \frac{1}{M(z)} \leq |f(z)| \leq M(z) \quad \forall f \in \mathcal{F}_{a,M}\}$$

L'étude du cas particulier indique que si $z \in V$ et $|z - z'| < \frac{d(z',\mathbb{C}\setminus U)}{2}$ alors $z' \in V$. Donc V est ouvert dans U. De même $U \setminus V$ est ouvert car $z \notin V$ et $|z-z'| < \frac{d(z',\mathbb{C}\setminus U)}{2} \Rightarrow z' \notin V$ Comme V est non vide, U est connexe donc $V = U$. L'étude du cas particulier prouve que $\mathcal{F}_{a,M}$ est borné sur tout disque fermé de U. Comme $V = U$, tout compact peut être recouvert par un nombre fini de tels disques. Donc le théorème est vrai sur U quelconque. □

Remarque. Au vu de la topologie dont on a muni $\mathcal{H}(U)$, cela signifie donc que $\mathcal{F}_{a,M}$ est *compacte.*

On va utiliser un énoncé plus faible pour la preuve du théorème de Picard : $\mathcal{F}_{a,1}$ est compact. Cependant cet énoncé était minimaliste : on avait besoin d'avoir de la marge de manœuvre $[\frac{1}{M}, M]$ sur les valeurs de $|f(a)|$ pour démontrer la propriété sur tout ouvert connexe.

Théorème 25. *Grand théorème de Picard :*
Soit f holomorphe sur $D^*(a, 2R)$ admettant une singularité essentielle en a. Alors pour toute valeur $w \in \mathbb{C}$ sauf au plus une, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = w$.

Démonstration. On suppose $a = 0$, $U = D^*(0, 2R)$. Comme $\mathbb{C} \setminus f(U)$ croît si R décroît, il suffit de montrer qu'il admet au plus une valeur, pour cela on raisonne par l'absurde.

Supposons que 2 valeurs soient omises par f, on peut décider que ce sont 0 et 1 car $\alpha f + \beta$ et f ont les mêmes singularités (quand $\alpha \neq 0$). Soit

$$M_n = \sup_{|z|=\frac{R}{n}} |f(z)|$$

On va commencer par montrer que M_n tend vers $+\infty$: si tel n'était pas le cas on pourrait extraire une sous suite bornée de $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ notée $(M_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. D'après le principe du maximum appliqué à la couronne $\frac{R}{n_{k+1}} \leq |z| \leq \frac{R}{n_k}$, si M est une borne de la suite M_{n_k} les valeurs de f sont aussi bornées sur la couronne.

$\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$ donc l'union de toutes ces couronnes est $D^*(0, \frac{R}{n_0})$. Si M majore la suite M_{n_k} alors elle majore aussi les valeurs de f prises sur le disque épointé. Donc 0 serait une singularité illusoire de f, ce qui est faux. Donc

$$\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$$

Comme f ne s'annule pas, $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur le disque épointé. Par le théorème de Weierstrass, 0 est une singularité essentielle de f équivaut à dire que 0 est une singularité essentielle de $\frac{1}{f}$. Soit

$$m_n = \inf_{|z|=\frac{R}{n}} |f(z)|$$

La suite vérifie donc :

$$\lim_{n\to\infty} m_n = 0$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, m_n < 1 < M_n$. Donc, $\exists (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, |f(\frac{R}{n})e^{\mathrm{i}\alpha_n}| = 1$ par le théorème des valeurs intermédiaires. On pose

$$g_n(z) = f(\frac{z}{n}e^{\mathrm{i}\alpha_n})$$

Les g_n sont holomorphes, omettent les valeurs 0 et 1, et $\forall n \in \mathbb{N}, |g_n(R)| = 1$. D'après le théorème précédent les g_n sont bornées dans leur ensemble sur tout compact, donc sur le compact $|z| = R$. Mais ceci contredit que $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty$. Donc il est impossible que f omette 2 valeurs du plan. On a choisi R quelconque, on peut donc raisonner de la même façon avec une suite $\frac{R}{n}$ et ainsi exhiber la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'énoncé. □

Corollaire. *Petit théorème de Picard*

Si f est entière non constante, alors elle est surjective ou presque !

Démonstration. Si f est polynômiale, elle est surjective : c'est la traduction directe du théorème de d'Alembert-Gauss.

Si f est non polynômiale, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(\frac{1}{z}) \end{array}$ est holomorphe et admet une singularité essentielle en 0. Donc l'image par φ d'un voisinage épointé $D^*(0, r)$ est $\mathbb{C} \setminus \{x\}$. Ainsi, l'image par f de $\{z, |z| > \frac{1}{r}\}$ est $\mathbb{C} \setminus \{x\}$. Donc f recouvre au moins $\mathbb{C} \setminus \{x\}$ ce qui prouve le petit théorème de Picard. □

Le grand théorème de Picard ne se déduit pas aussi facilement du petit : il est plus difficile de ramener un problème de singularité essentielle à un problème de fonction entière.