Université Savoie Mont-Blanc **L3 MIASHS Éco**

MATH502 - TD feuille 3

Exercice 1. Soit X le nombre aléatoire d'avions arrivant en une heure sur un aéroport. On a estimé $\mathbb{E}[X] = 16$ et $\mathbb{V}[X] = 16$.

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, donner une minoration de $\mathbb{P}(10 < X < 22)$.
2. Comparer le résultat avec celui obtenu en supposant que X a pour loi $\mathcal{P}(16)$.

Exercice 2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, combien de fois doit-on lancer une pièce de monnaie pour que l'on ait une probabilité supérieure à 0,9 que le nombre de « pile » sur le nombre de lancers soit compris entre 0,4 et 0,6 ?

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ puis, pour tout z, $\mathbb{E}[z^X]$.
Mêmes questions lorsque X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.

Exercice 4. Calculer la moyenne et la variance des lois usuelles vues en cours.

Exercice 5. Soient $a > 0$ et b un réel. Déterminer la loi de la v.a. $Y = aX + b$ quand X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ puis quand X est gaussienne centrée réduite.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

1. Ces deux variables suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer l'espérance et la variance de $Z = 2X - Y$.
2. X suit la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$, Y la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer l'espérance et la variance de $Z = 2\,X - 3\,Y$.

Exercice 7. Soit X une v.a. de densité $p(x) = x\,\exp(-\frac{x^2}{2})\mathbf{1}_{x\geq 0}$. Vérifier que p est une densité de probabilité puis calculer la moyenne de X.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de densité $x \longmapsto \frac{e^{-|x|}}{2}$.

1. Pour $|s| < 1$, calculer $\Lambda(s) = \mathbb{E}[\exp(sX)]$. Comparer $\Lambda''(0)$ et $\mathbb{E}[X^2]$.
2. Déterminer la loi des variables aléatoires $U = \exp(-|X|)$ et $Y = \frac{1-U}{U}$.

Exercice 9. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit $Y = \exp(X)$. Déterminer la densité de Y, $\mathbb{E}[Y]$ ainsi que $\mathbb{V}[Y]$.

Exercice 10. Soient X et ε deux v.a. indépendantes ; X de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ et ε de loi donnée par $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. On pose $Y = \varepsilon\,X$. Quelle est la loi de Y ? Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. Soit X une v.a. de densité $p(x) = \lambda \exp(-|x|)$.

1. (a) Calculer λ ; déterminer la fonction de répartition de X et la loi de $|X|$.
   (b) Montrer que X possède des moments de tous les ordres et calculer $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout entier n. En déduire la moyenne et la variance de X.
2. Soit Y une v.a. indépendante de X et de même loi. Calculer la moyenne et la variance des v.a. $S = 2X - Y$, $T = X^2$.

Exercice 12. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de $S = X_1 + \ldots + X_n$? En déduire la moyenne et la variance de S.

Exercice 13. Soient X et Y deux v.a. indépendantes. Calculer la loi de la v.a. $X + Y$ dans les cas suivants :

1. X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, Y de loi $\mathcal{P}(\mu)$,
2. X de loi $\mathcal{B}(n, p)$, Y de loi $\mathcal{B}(m, p)$,
3. X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, Y de loi $\mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$.

Exercice 14. Une puce se déplace dans le plan par saut de longueur $\delta > 0$. La puce part du point O, origine des coordonnées du plan, et saute n fois dans une direction qui, pour chaque saut, est aléatoire. L'abscisse et l'ordonnée de la puce, après n sauts, sont

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \delta \cos(\theta_i), \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} \delta \sin(\theta_i);$$

et on suppose les v.a. $(\theta_i)_{1\geq i\geq n}$ indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.
Calculer l'espérance et la variance de de X_n et Y_n, puis $\mathbb{E}[X_n^2 + Y_n^2]$. Calculer $\mathbb{E}[X_n Y_n]$; les v.a. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

Exercice 15. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $0 < p < 1$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$S(\omega) = \inf\{i \geq 1,\ X_i(\omega) = 1\}, \qquad T(\omega) = \inf\{i \geq 1,\ X_i(\omega) = 0\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(T = \infty) = \mathbb{P}(S = \infty) = 0$ et déterminer la loi de S et T.
2. On définit, pour $\omega \in \Omega$, $\tau(\omega) = \inf\{i \geq 2,\ X_{i-1}(\omega) = 0,\ X_i(\omega) = 1\}$ avec la même convention.
   (a) Montrer que $\tau \geq T + 1$.
   (b) Établir que $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$.
   (c) Montrer que $\tau(\omega) = \inf\{i > T(\omega),\ X_i(\omega) = 1\}$.
3. Montrer que, si $k \geq 2$, $\{\tau = k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\tau = k\} \cap \{T = i\}$.
4. Montrer que si $m \geq 1$, $\ell \geq 1$, $\mathbb{P}(\tau = m + \ell | T = \ell) = \mathbb{P}(S = m)$.
5. En déduire que, pour $k \geq 2$, notant $q = 1 - p$,
$$\mathbb{P}(\tau = k) = \frac{pq}{q - p}(q^{k-1} - p^{k-1}).$$
6. Déterminer la fonction caractéristique de τ, sa moyenne, sa variance.

Exercice 16.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   Calculer, sans utiliser le formulaire :
   (a) l'espérance de X ;
   (b) pour tout $|s| \leq 1$, $G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right]$.
2. Soient X_1, X_2, …, X_n des variables aléatoires indépendantes ; pour tout $1 \leq i \leq n$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$. On considère la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et on note $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.
   (a) Calculer l'espérance de Z.
   (b) Calculer la variance de Z.
   (c) Calculer, pour tout $s \in [-1, 1]$, $G_Z(s) = \mathbb{E}\left[s^Z\right]$
   (d) En déduire la loi de Z.

Exercice 17. On rappelle que, pour tout $-1 < x < 1$,

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad S'(x) = \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. Calculer, sans utiliser le formulaire,
   (a) l'espérance de X ;
   (b) pour tout $|s| \leq 1$, $G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right]$.
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. On note $Z = X_1 + X_2$. Calculer, pour tout $|s| \leq 1$, $G_Z(s) = \mathbb{E}\left[s^Z\right]$.
3. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ de loi donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \mathbb{P}(Y = k) = p^2(k-1)(1-p)^{k-2}.$$

   (a) Calculer, pour tout $|s| \leq 1$, $G_Y(s) = \mathbb{E}\left[s^Y\right]$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 18 (Premier as)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $\{1,\ldots,6\}$. On note

$$T = \inf\{n \geq 1 \,;\, X_n = 1\}.$$

1. Décrire les événements $\{T = k\}$ et $\{T > k\}$.
2. Déterminer la loi de T ainsi que son espérance.
3. Calculer, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(T > \mathbb{E}[T] + r)$.
4. Calculer la moyenne de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{T} X_i$.

Exercice 19.

1. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $r > 0$.
   (a) Calculer, pour tout réel λ, $\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_1}\right]$ et $\mathbb{E}\left[e^{\lambda S_n}\right]$.
   (b) En remarquant que, pour $\lambda > 0$, $\{\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + r\} = \left\{e^{\lambda S_n} \geq e^{n\lambda(\frac{1}{2}+r)}\right\}$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + r\right) \leq \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda r}\right)^n.$$

   (c) En remarquant que, pour $\lambda > 0$, $\{\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2} - r\} = \left\{e^{-\lambda S_n} \geq e^{-n\lambda(\frac{1}{2}-r)}\right\}$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2} - r\right) \leq \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda r}\right)^n.$$

   (d) En déduire, en utilisant l'inégalité $\operatorname{ch} x \leq e^{x^2/2}$, que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq r\right) \leq 2\, e^{-2nr^2}.$$

2. En utilisant cette dernière inégalité, combien de fois doit-on lancer une pièce de monnaie pour que l'on ait une probabilité supérieure à 0,9 que la fréquence de « pile » soit comprise entre 0,4 et 0,6 ?