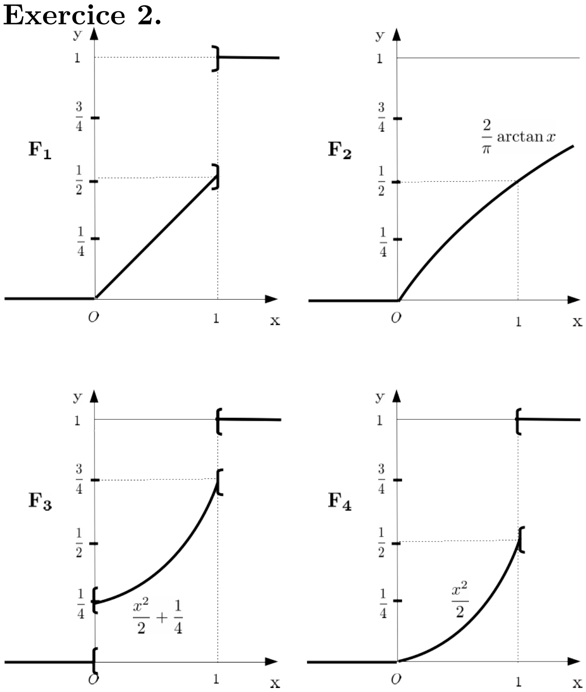
## Université Savoie Mont-Blanc      L3 MIASHS Éco

# MATH502 - TD feuille 2

**Exercice 1.** On lance deux fois un dé équilibre et on désigne par $P$ le produit des résultats obtenus. Pour modéliser cette expérience, on considère $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$ muni de la probabilité uniforme et l'application $P$ définie sur $\Omega$ par $P((i, j)) = ij$.
Pour chacune des valeurs possibles $k$ de $P$, déterminer $\{\omega \in \Omega : P(\omega) = k\}$ puis $\mathbb{P}(P = k)$.

**Exercice 2.**




Pour chacune des fonctions $F_1$ à $F_4$ ci-contre, répondre aux questions suivantes :

1. Est-elle une fonction de répartition ?
2. Si oui, y a t-il une densité (que l'on précisera) ?
3. Dans le cas où c'est une fonction de répartition, calculer $\mathbb{P}(\{0\})$, $\mathbb{P}(\{1\})$, $\mathbb{P}([0, 1])$ et $\mathbb{P}(]0, 1[)$.

**Exercice 3.** À quelle condition sur les réels $a$ et $b$ la fonction $F$ définie par $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = 1$ si $x \geq 1$ et $F(x) = ax^2 + b$ pour $0 \leq x < 1$ est-elle une fonction de répartition ?

**Exercice 4.** Soit $X$ une variable aléatoire dont la fonction de répartition $F$ vérifie :

$$\forall x \geq 0, \qquad F(x) = 1 - \frac{1}{1 + x[x]},$$

où $[x]$ est la partie entière de $x$.

1. Préciser la valeur de $F(0)$ et en déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x < 0$.
2. Calculer $\mathbb{P}(\{X \leq 1\})$, $\mathbb{P}\left(\{X = \frac{1}{2}\}\right)$, $\mathbb{P}(\{X = 1\})$, $\mathbb{P}(\{1 < X \leq 2\})$.
3. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X = k\})$.
4. $X$ possède-t-elle une densité ?

**Exercice 5.** Une urne contient cinq boules rouges et une noire. On tire les boules successivement et sans remise jusqu'à ce que l'urne soit vide. Quelle est la loi de la variable aléatoire « rang d'apparition de la boule noire » ?

**Exercice 6.** Un urne contient $n$ boules rouges et $m$ noires. On tire les boules successivement et sans remise jusqu'à ce que l'urne soit vide. Quelle est la loi de la variable aléatoire « rang de la première boule noire tirée » ?

**Exercice 7.** À quelle condition sur le réel $\lambda$, la fonction $p(x) = \lambda x \exp(-2x)\mathbf{1}_{x\geq 0}$ est-elle une densité de probabilité ? Dans ce cas, déterminer la fonction de répartition associée ? Mêmes questions pour $p(x) = \lambda|x|\exp(-|x|)$.

**Exercice 8.**

1. Soit $X$ une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer les fonctions de répartition de $Y = u(X)$ et $Z = v(X)$ où $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = 2\min(x, 1-x)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de $T = \max(S, 0)$ où $S$ suit la loi de Cauchy. La v.a. $T$ possède-t-elle une densité ?

**Exercice 9.** Soit $X$ une v.a. uniforme sur $[0,1]$ et $p \in ]0,1[$. Quelle est la loi de $Y = \mathbf{1}_{X\leq p}$ ? Construire à l'aide de $X$ une variable aléatoire $Z$ prenant les valeurs $a$, $b$ et $c$ avec probabilité $p$, $q$ et $r$ si $p$, $q$, $r$ sont trois réels de $[0,1]$ tels que $p + q + r = 1$.

**Exercice 10.** Soit $X$ une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de la v.a. $Y = 1 + [X]$ ? ($[x]$ désigne la partie entière de $x$).

**Exercice 11.** Quelle est la loi de la v.a. $Y = 2 + [X]$ si $X$ a pour fonction de répartition $F$ définie par $F(x) = q^x(x(q-1)-1)+1$ si $x > 0$, $F(x) = 0$ sinon, $0 < q < 1$.

**Exercice 12.** Soit $X$ une v.a. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$ i.e. pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On définit une v.a. $Y$ en posant $Y = X/2$ si $X$ est pair et $Y = (X+1)/2$ si $X$ est impair. Déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 13.** Soit $X$ une v.a. uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de la v.a. $Y = \exp(\lambda X)$ si $\lambda > 0$ ? $Y$ possède-t-elle une densité ?

**Exercice 14.** À quelle condition sur $\alpha$, la fonction $p$ définie par $p(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ si $0 < x < 1$, $p(x) = 0$ sinon est-elle une densité de probabilité ? Soit $X$ une variable aléatoire de densité $p$. Montrer que la loi de $Y = -\alpha\ln(X)$ ne dépend pas de $\alpha$.

**Exercice 15.** Soient $X$ une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ et $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la v.a. $Y = -\ln(X)/\lambda$ en calculant sa fonction de répartition puis en donnant une densité ?

**Exercice 16.** Soient $\alpha$ un réel et $p$ la fonction réelle définie par

$$p(x) = \frac{\alpha}{(x-1)^2}, \quad \text{si } x < 0, \qquad p(x) = \alpha e^{-2x}, \quad \text{si } x \geq 0.$$

1. Calculer $\alpha$ pour que $p$ soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition $F$ associée à $p$.
3. Soit $X$ une v.a.r. de densité $p$. Déterminer la loi de la v.a. $Y = \mathrm{sgn}(X)$ avec $\mathrm{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$, $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\mathrm{sgn}(0) = 0$.