Université Savoie Mont-Blanc **L3 MIASHS Éco**

MATH602 - TD2 : Estimations par échantillonage

Exercice 1. Les durées de vie d'ampoules de fabrications identiques, suivent des lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de paramètres inconnus. On observe, sur un échantillon de 30 ampoules, les données : $\mathcal{M} = 2000$ et $\mathcal{V}^* = 300$. Déterminer des intervalles de confiance au risque 5% pour μ et σ.

Exercice 2. Pour estimer la précision d'un thermomètre, on réalise un échantillon de 50 mesures de température, à la même température de 20°C. On obtient $\mathcal{V}^*(x_1, \dots, x_{50}) = 0,23$. Quel intervalle de confiance au risque 1% peut-on déduire pour $Var(X)$?

Exercice 3. On a pesé 10 palettes de briques et obtenu les résultats suivants (en kg)

$$759,\ 750,\ 755,\ 756,\ 761,\ 765,\ 770,\ 752,\ 760,\ 767.$$

1. Calculer la moyenne empirique $\mathcal{M} = 759,5$ et la variance sans biais $\mathcal{V}^* = 378,5$.
2. On suppose que la masse d'une palette est une v.a. Gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer des intervalles de confiance pour μ et σ au risque de 5%.

Exercice 4. Lors de 10 ouragans, on relève les vitesses maximales de vents (en km/h) suivantes :

$$125\ ,\ 165\ ,\ 150\ ,\ 95\ ,\ 120\ ,\ 115\ ,\ 100\ ,\ 105\ ,\ 105\ ,\ 130.$$

1. Calculer la moyenne empirique $\mathcal{M} = 121$ et la variance sans biais $\mathcal{V}^* = 4540$.
2. On suppose que la vitesse maximale du vent d'un ouragan suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer des intervalles de confiance pour μ et σ au risque de 5% d'après notre échantillon.

Exercice 5. La durée de vie d'un poisson en pisciculture (en semaines) est supposée suivre une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où p est inconnu. On relève les données suivantes après l'éclosion de 1000 oeufs :

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nb. de morts	251	154	74	56	32	21	11	5	5
Morts Cum.Croiss.									
Effectif vivant									

1. Combien de poissons seront relâchés (encore en vie) à l'issue des 9 semaines ?
2. Estimer une valeur de p donnée par cet échantillon. Que dire du modèle ?

Exercice 6. Lors d'essais cliniques, on mesure la charge virale X (en mg/Litre de sang) de 100 patients traités et 100 patients témoins, on affiche les résultats dans le tableau suivant.

Traités	$[0, 0.1]$	$[0.1, 0.2]$	$[0.2, 0.3]$	$[0.3, 0.4]$	Témoins	$[0, 0.1]$	$[0.1, 0.2]$	$[0.2, 0.3]$	$[0.3, 0.4]$
Effectif	15	50	20	5	Effectif	10	45	40	5

Est-ce que le traitement fonctionne pour réduire la charge virale ?
Indication : utiliser le groupe témoin pour créer un intervalle de confiance de la charge virale moyenne μ au risque de 5%, et vérifier si la charge virale moyenne μ_T du groupe traité en fait partie.

Exercice 7. On jette un dé truqué pour lequel on ignore la probabilité p que sorte un 6. Après 1000 lancers, on compte 220 fois le 6. Déterminer un intervalle de confiance au risque 5% de p.

Exercice 8. Dans la commune de Paris, on observe sur un échantillon sondé de 10000 votants, une proportion de 21% prétendant qu'ils et elles voteront pour la gauche. Déterminer un intervalle de confiance au risque de 1% pour les intentions de vote à gauche.

Exercice 9. Calculer l'E.M.V. de p pour une loi parente de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Exercice 10. Calculer l'E.M.V. de λ pour une loi parente de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 11. Calculer l'EMV de μ pour une loi parente Gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exercice 12. Calculer l'EMV de $k > 0$ pour une loi parente de densité $f_k(x) = (k+1)x^k \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

Exercice 13. Calculer l'E.M.V. de $\alpha > 0$ pour une loi Riemann de densité $f_\alpha(t) = \dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{t\geq 1}$

Exercice 14. Calculer l'E.M.V. de λ pour une loi de densité $f_\lambda(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$.

Exercice 15. Calculer l'E.M.V. de b pour une loi parente uniforme $\mathcal{U}([0, b])$.

Exercice 16. La durée de vie X (en heures) d'un couplage de deux générateurs suit une loi parente continue, dont la densité est $p_\theta(x) = \theta^2 e^{-\theta x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Le paramètre $\theta > 0$ est inconnu.

1. Calculer l'estimateur des moments θ_0 de θ.
2. Calculer l'E.M.V. $\widehat{\theta}$ de θ.
3. *Application :* valeur de $\widehat{\theta}$ pour l'échantillon 300 , 450 , 550 , 600 , 600 , 250 , 800 , 650 ?

Exercice 17. Pour estimer la probabilité θ d'être contrôlé dans le métro, un groupe réalise l'expérience suivante : chaque personne compte combien de voyage elle a fait avant d'être contrôlée. Le nombre de voyages X suit une loi discrète géométrique : $P(X = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, où θ est inconnu.

1. Calculer l'estimateur des moments θ_0 de θ.
2. Calculer l'E.M.V. $\widehat{\theta}$ de θ.
3. *Application :* montrer que $\widehat{\theta} = \frac{100}{680}$ pour l'échantillon avec $n = 100$ suivant :

Voyages	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nb. Amendes	13	10	8	10	8	8	6	4	5	4	4	4	4	3	3	1	2	2	1	0

Exercice 18. On modélise la température X (en degrés celsius) d'une grotte, avec une loi continue uniforme, de densité $p_\theta(x) = 1/(2\theta)\mathbf{1}_{[-\theta,\theta]}(x)$, où θ est inconnu.

1. Soit $x_1, \ldots, x_n$ un relevé de températures de la grotte et $\theta > 0$. Montrer que $L(x_1, \ldots, x_n, \theta)$ est non-nul si et seulement si $\theta \geq \max\{|x_k|\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}$.
2. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}$ de l'échantillon.
3. *Application :* Quel est $\widehat{\theta}$ pour le relevé suivant ? Que dire du modèle ?

Température	$[-5, -4]$	$[-4, -3]$	$[-3, -2]$	$[-2, -1]$	$[-1, 0]$	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$
Effectif	0	6	21	44	31	36	21	31	24	2

Exercice 19. La durée de vie X (en heures) d'une ampoule suit une loi parente continue (exponentielle), dont la densité est $p_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On ne connaît pas le paramètre $\theta > 0$.

1. Montrer que l'E.M.V. est l'inverse de la moyenne empirique : $\widehat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)^{-1}$.
2. Application : Quelle valeur de θ peut-on estimer avec cet échantillon ?

   500 ; 1000 ; 1000 ; 1000 ; 1000 ; 2000 ; 2000 ; 25000 ; 4000 ; 10000.

Exercice 20. Pour un lot de 3000 mousquetons, on teste la résistance X (en kN) de 8 d'entre eux en les détruisant. La force moyenne observée sur l'échantillon de 8 est $\mathcal{M} = 31$ (kN) et $\mathcal{V}^* = 0.1$ ($(kN)^2$).

1. On suppose que la résistance suit une loi Gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer un intervalle de confiance pour μ et σ au risque 0.01.
2. On suppose maintenant $\mu = 30,61$ et $\sigma^2 = 0,71$ Calculer la probabilité que tous les mousquetons du lot soient conformes, c'est à dire qu'ils satisfassent tous $X \geq 22$.