**Université Savoie Mont-Blanc** **L3 MIASHS Éco**

# MATH602 - TD1 : convergence et échantillons

**Exercice 1.** Soit $\Omega = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, et $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = n \times \mathbf{1}_{[1-\frac{1}{n},1]}(t) \quad \text{(faire un dessin de } f_n\text{).}$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers 0 presque partout, et en probabilités.
2. Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas vers 0 dans $L^1$, ni dans $L^2$, ni simplement.
3. Montrer que $(f_n)_n$ vue comme une variable aléatoire, converge en loi vers 0.

**Exercice 2.** Soit $\Omega = [0, 1]$ muni de la mesure uniforme, et $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = \mathbf{1}_{[\frac{r}{2^k},\frac{r+1}{2^k}]}(t) \text{ où } k \text{ est le plus grand entier t.q. } 2^k \leq n \text{ et } r = n - 2^k.$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers 0 dans $L^1$, dans $L^2$ et en probabilités.
2. Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas vers 0 simplement, ni presque partout.
3. Montrer que $(f_n)_n$ vue comme une variable aléatoire, converge en loi vers 0.

**Exercice 3.** On lance une pièce, $X = \mathbf{1}_{face}$ et pour $n \geq 1$, $Y_n = \mathbf{1}_{pile}$. Montrer que $Y_n \to X$ en loi, mais pas en probabilité, ni presque partout, ni dans $L^1$, ni dans $L^2$, ni simplement, ni ...

**Exercice 4.** Soit $\Omega$ un espace de probabilité, $X_n$ une suite de v.a. sur $\Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{en\ proba}{\longrightarrow}} \lambda \iff X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{en\ loi}{\longrightarrow}} \lambda$$

**Exercice 5.** Soient $(U_i)_{i\geq1}$ une suite de variables i.i.d de même loi que $U \sim \mathcal{N}(0, 2)$. À l'aide de la loi forte des grands nombres, calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i^2 e^{-\frac{U_i^2}{4}}$$

**Exercice 6.** Dans une cargaison de bois de chauffe avec $n$ bûches, le diamètre $D_i$ de la bûche $i$ suit une loi uniforme $D_i \sim \mathcal{U}([0.2, 0.5])$ en mètres. La longueur de chaque bûche est $0,5m$. La densité $\rho$ de ce bois est $710kg.m^{-3}$.

1. Montrer que la masse moyenne d'une bûche est $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 710 \times 0,5 \times \frac{\pi}{4}D_i^2$.
2. Calculer une approximation de la masse moyenne des bûches de la cargaison.

**Exercice 7.** Un atome de plutonium 239 a un temps de demi-vie de $T = 24110$ ans, donc sa durée de vie $X$ (en années) suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda = \frac{ln(2)}{T} = 2,875.10^{-5}\ an^{-1}$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$ un nombre d'années, calculer $P(X \geq t)$. Que signifie ce nombre ?
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ un nombre d'années et $n$ un nombre d'atomes de plutonium, on définit $n_t$ comme le nombre d'atomes encore "en vie" à l'instant $t$.
   Montrer que pour tout $t$ fixé, $\frac{n_t}{n}$ converge vers un nombre $p_t$ et exprimer $p_t$ en fonction de $t$.
3. En quelle année les bombes atomiques seront-elles désintégrées à 99% ?

**Exercice 8.** Soit $(X_n)_n$ et $X$ des fonctions de carré intégrable, sur un espace de probabilités $\Omega$. On suppose que $X_n \to X$ dans $L^2$.

1. Montrer que $E(X) = \lim_{n\to+\infty} E(X_n)$. (utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz)
2. Montrer que $X_n \to X$ en probabilités. (utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

**Exercice 9.** Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)$ une suite de v.a. de lois géométriques : $X_n \sim \mathcal{G}(\frac{\lambda}{n})$.
On veut montrer que $\frac{X_n}{n} \to X$ en loi, où $X$ une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Montrer que $E(\frac{X_n}{n})$ converge vers $E(X)$.
2. Montrer que la fonction de rép $F_n$ de $\frac{Y_n}{n}$ où $Y_n \sim \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda/n})$, satisfait $F_n \to F_X$ p.p.
3. Montrer que $\frac{Y_n}{n} \to X$ en loi, puis $\frac{X_n}{n} \to X$ en loi.
4. Application : $X$ est la durée de vie d'un atome radioactif (en h). Que représente $X_n$ ?

**Exercice 10.** Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)$ une suite v.a. de lois binômiales, où $X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$.
On veut montrer que $X_n \to X$ où $X$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Montrer que $E(X_n) \to E(X)$ quand $n \to +\infty$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $P(X_n = k) \to P(X = k)$ quand $n \to +\infty$.
3. Application : $X$ est le nombre de feuilles que perd un arbre en un jour, que représente $X_n$ ?

**Exercice 11.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. de lois uniformes $\mathcal{U}[a_n, b_n]$.
Montrer que si $a_n \to a$ et $b_n \to b$, alors $X_n \to X$ en loi, où $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.

**Exercice 12.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. de lois normales $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$.
Montrer que si $\mu_n \to \mu$ et $\sigma_n \to \sigma > 0$, alors $X_n \to X$ en loi, où $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

**Exercice 13.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. de lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda_n)$.
Montrer que si $\lambda_n \to \lambda > 0$ alors $X_n \to X$ en loi, où $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

**Exercice 14.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. de lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$.
Montrer que si $p_n \to p \in ]0, 1[$ alors $X_n \to X$ en loi, où $X \sim \mathcal{B}(p)$.

**Exercice 15.** Soit $(X_n)$ une suite de v.a. de lois géométriques $\mathcal{G}(p_n)$.
Montrer que si $p_n \to p \in ]0, 1[$ alors $X_n \to X$ en loi, où $X \sim \mathcal{G}(p)$.

**Exercice 16.** La proportion des français développant le cancer de la thyroïde $p = 0,0025$. On note $S_{10000}$ la v.a. décrivant le nombre de patients atteints par le cancer de la thyroïde, parmi un échantillon donné de 10000 patients en France.

1. Déterminer un intervalle de confiance au risque de 1% de la valeur de $S_n$.
2. Que peut-on dire si pour un échantillon donné, on obtient de $S_{10000} = 40$ ?

**Exercice 17.** Un conducteur passe tous les jours, 240 fois par an, devant le même feu, qui a $\frac{3}{4}$ de chances d'être rouge. Déterminer :

1. Un intervalle de confiance au risque $\alpha = 0,05$ pour le nombre de feux rouges en un an.
2. La probabilité (approximative) qu'il rencontre moins de 150 feux rouges.

**Exercice 18.** La masse $X$ (kg) d'un bébé de 6 mois est une v.a. Gaussienne $X \sim \mathcal{N}(7.4, 0.5^2)$.

1. Sur un échantillon de 30 bébés, déterminer un int. conf. $\alpha = 0,05$ pour la masse moyenne.
2. Quelle est la probabilité que la masse moyenne de l'échantillon soit entre 7 et 8 kg ?

**Exercice 19.** Dans un avion, la masse d'un bagage en soute non-majoré est 23kg. On suppose que la masse d'un bagage (en kg) est une v.a. d'espérance 22 et d'écart-type 1,4. Sur un vol de 500 passagers,

1. Quelle est la probabilité que la masse moyenne des bagages soit entre 21,5 et 22,5 kg ?
2. Déterminer un intervalle de confiance au risque 1% pour la masse totale de bagages.

**Exercice 20.** Un central téléphonique connecte 5000 abonnés. Chaque abonné a une probabilité de 0,02 de téléphoner à l'heure de pointe. On appelle $X$ le nombre d'appels à l'heure de pointe.

1. Soit $N$ le nombre de lignes du central. Calculer la probabilité d'avoir saturation : $X \geq N$.
2. Quelle valeur de $N$ doit-on prendre pour garantir $P(X \geq N) \leq 0,01$ ?
3. Et pour garantir à 90% de chances que le central ne sature pas pendant une année ?